

Los Hermosos Cristales de la Campana de Gauss

Carlos E. Puente

La Habana, Enero 2008

Portada. Es una gran alegría para mí el regresar a La Habana para compartir en este taller algunos bellos resultados que tuvimos la suerte de encontrar con mis colaboradores.

El objetivo de esta charla es mostrar cómo se encuentra un vasto universo de cristales dentro de la campana de Gauss bidimensional.

Página 2. Sucede que, intentando comprender la estructura compleja de las redes de los ríos, un buen día estuve experimentando con dos ecuaciones sencillas como las aquí mostradas, w_1 y w_2 , que tienen a z como parámetro. Resulta que al iterar dichas funciones lineales arbitrariamente, con un efecto positivo de z en la primera función y un efecto negativo en la segunda, se hallan puntos sucesivos (x, y) que dan lugar, luego de muchos puntitos, a un **alambre**, que, como lo ven arriba a la izquierda para $z = 0.5$, luce como un perfil de montaña que además interpola los puntos $(0,0)$, $(1/2, 1)$ y $(1,0)$.

Mi idea original era el estudiar si dichas nociones podían extenderse para construir superficies de montañas que me permitieran estudiar, al variar parámetros adecuados, cómo evolucionaba la red de drenaje relacionada con dicha topografía. Aunque esta idea no fructificó, en otro buen día se me ocurrió el estudiar las “**sombras**” que los alambres producen sobre los ejes x y y , en función no sólo del parámetro z sino de la forma en que se calculan las iteraciones.

Resulta que si se emplea una moneda cargada para guiar las iteraciones, por ejemplo una que defina el uso de la función w_1 un 70% del tiempo y la función w_2 el 30% restante, se hallan las proyecciones dx y dy aquí mostradas. Como lo ven, dx no es más que el objeto **multifractal** relacionado con la turbulencia natural, pero

dy depende, de una forma no trivial, de las arrugas del alambre. El conjunto mostrado es un objeto intermitente y altamente complejo que parece estar guiado por el azar, pero dicha gráfica, que evoca geoméricamente a “datos geofísicos” reales, no depende del azar pues proviene de un par de objetos deterministas, es decir, el multifractal y el alambre.

Estas ideas esbozan un **enfoque Platónico** de la **complejidad** natural, pues en el mismo espíritu de la famosa alegoría del cavernícola en La República, lo que observamos, dy , bien puede ser sólo una sombra proveniente de realidades mayores, es decir el alambre de x a y , mediante una iluminación adecuada, en este caso dx . Las ideas son también Platónicas en un sentido romántico, pues de ellas ha surgido el dilucidar si la complejidad natural puede ser en efecto sólo una sombra.

Página 3. Aquí se observan diversas sombras obtenidas variando el punto medio por el cual pasa el alambre. Como puede verse, las funciones de autocorrelación y sus espectros de potencia son similares a los obtenidos en la **naturaleza**. Y se halla en verdad un **universo** de conjuntos complejos los cuales están plenamente caracterizados por medio de pocos parámetros geométricos.

Página 4. Como se observa aquí, cuando el parámetro z tiende a su máximo valor de 1, el alambre crece en dimensión y, al llenar el plano y tener muchísimas arrugas u oscilaciones, produce una **campana** de Gauss como proyección.

Este resultado resulta ser sorprendentemente **universal** pues el cambiar el sesgo en la moneda siempre da lugar a una campana, no siempre la misma claro está, y todo esto sucede a partir del mismo alambre límite. También resulta ser cierto que se halla una campana a partir de cualquier distribución **difusa** en x , es decir cualquiera que no es discreta, y esta propiedad general implica que un alambre límite

provee un puente insospechado entre el **desorden** de cualquier multifractal espinoso y Cantoriano y el **orden** armónico de la campana.

Página 5. Sucede que las nociones pueden extenderse a **dos dimensiones** o más. Esto requiere ecuaciones igualmente sencillas a las anteriores pero con más parámetros, en este caso los escalamientos r 's y los ángulos θ 's que reemplazan al parámetro z .

Como lo ven, a partir de estas ideas se generan **alambres** de x en la vertical al plano (y, z) , y esto permite calcular proyecciones o “sombras” ahora sobre el plano (y, z) , que exhiben gran complejidad, como en la naturaleza.

Página 6. En el límite, cuando la magnitud de los escalamientos r 's tiende a 1, el alambre **llena** el volumen en el que habita, y en esta dimensión superior siempre se hallan **campanas** independientemente de las iluminaciones dx . Aquí ven cómo a partir de un multifractal dx y mediante un alambre de x a (y, z) , dibujado a la derecha, se halla una campana bi-dimensional sobre (y, z) , mostrada desde arriba en dyz y por los lados en dy y dz .

Como se observa, estos casos transmutan **espinas** y **polvos** arbitrarios en la **armónica** y **lisa** curva normal. Dado que la campana se relaciona con la **conducción** del calor mediante el proceso de difusión y la ley de Fourier, los alambres que llenan el espacio terminan invirtiendo el orden físico prescrito, pues transforman vívidamente la **disipación** implícita en las cascadas multiplicativas turbulentas y sus multifractales por el mantenimiento de la energía.

Con el paso del tiempo, logramos con mis colaboradores comprobar matemáticamente la veracidad del límite Gaussiano en el caso unidimensional, más el caso bi-dimensional nos fue, y nos sigue siendo, esquivo. Fue así como otro buen día se nos ocurrió el estudiar cómo se formaban los círculos de la campana, dibujando no el resumen final aquí expuesto y que corresponde a 15 millones de puntos, sino

grupos sucesivos de iteraciones, por ejemplo de 2,000 en 2,000.

Página 7. Lo que hallamos es hermoso y sorprendente. La iteración de funciones sencillas define en el límite **descomposiciones exquisitas** de la **campana bi-dimensional**. Las dos imágenes aquí mostradas son sólo ejemplos de una infinidad de patrones que al superponerse forman círculos perfectos y campanas certeras, cuyas geometrías específicas e inesperadas dependen de la secuencia precisa empleada en las iteraciones, es decir de la sucesión obtenida al lanzar la moneda.

Como lo observan, en el **límite** central existe un **orden** oculto en el azar. Cuando se sincronizan los ángulos θ , 60 grados a la izquierda y 90 grados a la derecha, se viaja como “de gloria en gloria” y se manifiesta una **belleza** vital apreciada por diversas civilizaciones.

Página 8. Hoy por hoy sabemos que todos los **crisales de hielo** se encuentran **dentro de la campana**. Los aquí mostrados los halló mi bella esposa con buena paciencia, rellenando plantillas de crisales conocidos paso a paso, construyendo secuencias de iteraciones adecuadas a partir de grupos guiados por monedas justas y empleando dos funciones con ángulos iguales a 60 grados.

Página 9. Como lo pueden observar la campana incluye, en verdad, una plétora de crisales de hielo, estos obtenidos empleando los dígitos binarios del número omnipresente π para guiar las iteraciones.

Aquí ven crisales en forma de **estrella** y **sector** que contienen 100,000 puntos y cuyas formas dependen íntimamente de la secuencia de 0's y 1's empleada. Al final los crisales crecen por difusión, como en la naturaleza, y al aparecer sólo en el límite se puede decir que nacen en la **plenitud de la dimensión**.

Página 10. La campana también incluye, simplemente variando los ángulos, rosetones que se ajustan a diversos compuestos bioquímicos.

Prominentemente, el mostrado a la derecha se halla empleando dos funciones con ángulos iguales a 36 grados e iterándolas, nuevamente, de acuerdo a la expansión **binaria** de π .

A la izquierda observan el rosetón con 10 puntas del ADN de la vida. Así, la campana provee un **diseño** improbable de dicha geometría, uno que depende de la precisa sucesión de los primeros 40,000 bits de π .

Página 11. Pero hay aún más. Cuando el parámetro z tiene un efecto **positivo** en ambas funciones (antes lo era negativo en la segunda función), se halla un alambre en forma de nube y no montaña, y ahora el límite, cuando z tiende a 1, define una campana universal concentrada en el **infinito**.

De una manera mística, esta transformación poderosa y **máxima positiva** lo lleva todo a las nubes al son de la campana que evoca la libertad plena, y lo hace de modo tal que filtra todo desorden y anula cualquier entropía existente en cualquier iluminación no-discreta dx .

¿Cómo no apreciar en ésta transformación vital de espinas y polvo a la campana unitiva y de la oscura disipación a la luminosa conducción una invitación a lo inefable? Pues en la direccionalidad del diagrama de x a y podemos en verdad exclamar “¿Dónde está, oh disipación, **oh muerte**, tu victoria?”

Página 12. Ya para terminar deseo concluir con una canción. Se llama “**La Transformación**” y los invito a cantarla.