

C O M  
P L E  
X U S

*Revista de Complejidad, Ciencia y Estética*

# AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD. LA IMPOTENCIA DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

Carlos E. Puente

Department of Land, Air and Water Resources  
University of California, Davis  
Davis, CA 95616, Estados Unidos  
[cepuente@ucdavis.edu](mailto:cepuente@ucdavis.edu)

Carlos E. Puente

## AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD. DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

Carlos E. Puente

Department of Land, Air and Water Resources  
University of California, Davis  
Davis, CA 95616, Estados Unidos  
cepunte@ucdavis.edu

Durante las últimas décadas han proliferado las leyes de potencia como señales de la complejidad. Ellas se encuentran en la distribución de frecuencias de diversos procesos naturales violentos, tales como terremotos y avalanchas, y también se hallan en diversas manifestaciones de la violencia humana, tales como la riqueza de las naciones y las guerras en el mundo. Recientemente, el autor introdujo un procedimiento platónico encaminado a comprender la complejidad natural como la sombra de una transformación iluminada por un objeto multifractal. Este artículo muestra, en su primera parte, cómo podemos aprender de las leyes potencia para reafirmar la equidad como la única condición que puede generar la paz, y en su segunda parte, cómo el procedimiento platónico da lugar, en casos límite, a distribuciones gaussianas que, contrastando las leyes de potencia y al estar ligadas con los procesos de difusión y conducción, proveen otras lecciones relevantes para la paz. Se muestra cómo dichas campanas aportan una invitación a la unidad y a la armonía en el límite, pues sólo allí surge una belleza exótica que trastoca cualquier desorden, y porque además existe un caso especial cuya transformación positiva dota una curva normal que asombrosamente lo concentra todo en el infinito.

**Palabras clave:** *leyes de potencia, complejidad, lecciones, campana de Gauss, paz, plenitud, amor*

## 1. Introducción

Las últimas décadas han dado lugar al desarrollo de una serie de ideas encaminadas a entender y predecir la complejidad natural. Entre ellas, se encuentra el uso de modelos basados en estados críticos para representar las ubicuas relaciones de potencia presentes en la violencia natural y el empleo de procedimientos geométricos que intentan describir las intermitencias y tendencias presentes en las observaciones de la complejidad.<sup>1</sup>

Este trabajo muestra cómo tales nociones pueden emplearse para invitar a la paz, pues ellas proveen un marco de referencia coherente e imparcial que nos permite visualizar la dinámica y las consecuencias de los rasgos divisivos propios de la humanidad, incluyendo las opciones esenciales de orden y desorden que todos confrontamos en nuestras vidas. Complementando otras lecciones a partir de la complejidad basadas en la forma en que ocurren la turbulencia y el caos,<sup>2-3</sup> y argumentando, como en dichos trabajos, que podemos aprender de la forma en que sucede lo complejo para obrar en su defecto, este artículo reafirma cómo la paz verdadera sólo puede lograrse en lo sencillo, y esta vez en un estado caracterizado por los adagios imperativos geométricos: “que sea cero tu potencia”, y “que tu transformación sea siempre positiva y máxima.”

La organización de este trabajo es como sigue:

Primero, se explica qué son las leyes de potencia y se muestra cómo a partir de ellas aparecen pautas certeras hacia la equidad en el mundo y la paz, que contemplan el que evitemos comportamientos ‘críticos’ en nuestras vidas. Luego, se repasa un procedimiento geométrico platónico capaz de representar observaciones típicas de complejidad, y también distribuciones ‘pacíficas’ gaussianas, en una o más dimensiones, por medio de sombras de alambres fractales iluminados por distribuciones multifractales. Después se explica, en contraste con las leyes de potencia presentes en los datos complejos, cómo el caso gaussiano representa, en efecto, la mejor invitación a la paz y la armonía, pues sólo allí reside una belleza exótica, y porque existe un caso particularmente significativo concentrado en el infinito que invierte universalmente cualquier entropía. Finalmente, el trabajo se resume por medio de una poesía-canción.

## 2. Leyes de Potencia por Todos Lados

Como es bien sabido, en los últimos años se ha descubierto la presencia común de leyes de potencia, particularmente sencillas, en diversos procesos relacionados con la complejidad natural.<sup>4,5</sup> En la Figura 1 se observa la que es quizás la más famosa de ellas, y que define la escala de Gutenberg-Richter en los terremotos.

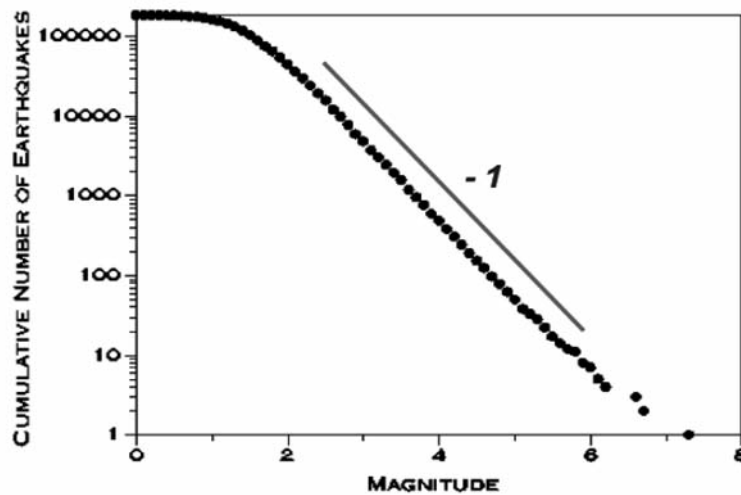


Figura 1. Distribución de frecuencias de terremotos en el Sur de California.  
Cortesía de Southern California Earthquake Center

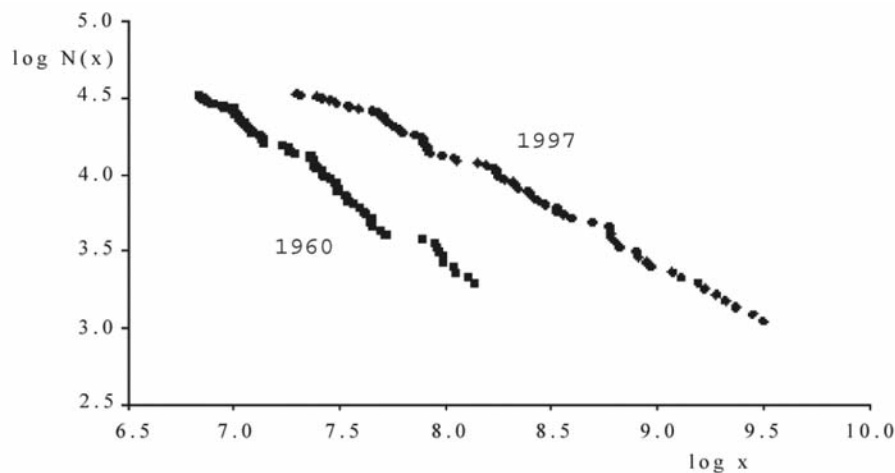
Como se observa, la cola de la distribución de probabilidades de los terremotos exhibe un comportamiento aproximadamente lineal en escala doble-logarítmica, que refleja la relación de potencias  $P[X \geq x] \sim x^{-c}$  con el exponente  $c \approx 1$ . Como es de esperarse, los eventos de menor magnitud tienen una probabilidad de excedencia mayor y los eventos de mayor magnitud tienen una probabilidad de excedencia menor, pero la transición entre escalas en la ‘cola pesada’ ocurre en la misma ‘línea’, y sin ningún pico notorio, indicando así que no existe un terremoto típico de un tamaño ‘característico’.

Las leyes de potencia también se encuentran en otras manifestaciones de la violencia natural tales como las inundaciones, las avalanchas, las erupciones

AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

volcánicas y los incendios forestales.<sup>6</sup> Aunque el exponente no es igual para todos los procesos, las distribuciones se alinean de una manera particularmente sencilla que indica el que dicha complejidad tenga propiedades universales, como ocurre con los conjuntos fractales y que ella sea, al final, no tan compleja como lo podría ser.

Además de la furia natural, las leyes de potencia también aparecen prominentemente en diversas situaciones relacionadas con las acciones de nosotros mismos como humanos. Como lo observó por primera vez Vilfredo Pareto, dichas leyes se hallan, por ejemplo, en las distribuciones sesgadas de riqueza en el mundo, tanto dentro de cada una de las naciones como en el mundo en general. Para ilustrar dichas ideas, la Figura 2 muestra la distribución de ingresos en el mundo desde sus percentiles 30 al 85, y allí se aprecia el doloroso ensanchamiento de las desigualdades en dos líneas con pendientes negativas y en escalas doble-logarítmicas de 1960 a 1997.<sup>7</sup>



*Figura 2. Percentiles 30 al 85 de la distribución de ingresos en el mundo (PIB per cápita). Se grafica la fórmula  $\log i + \log M + \log (1 - N(x_i))$ , donde  $i$  es la clasificación de una nación,  $M$  es el número de naciones y  $N(x_i)$  es la función de distribución de ingresos acumulados.*

Lo expresado en la Figura 2 es triste en verdad, pues, tal y como es bien sabido, las dos terceras partes de nuestros hermanos y hermanas viven bajo la espinosa condición de la pobreza,<sup>8</sup> y porque además, las inequidades reinantes impiden el florecimiento de una paz verdadera en el mundo.

Aunque, claro está, no todas las naciones son igualmente pobres, para el país más poderoso del mundo, no incluido en la Figura 2, la situación de desigualdades no es, en verdad, realmente mejor. En efecto, la distribución de riqueza dada por la simple cascada multiplicativa, relacionada con la turbulencia natural mostrada en la Figura 3, utilizando el mismo parámetro  $p = 0.7$  hallado universalmente en la naturaleza, y para 20 niveles del proceso, es comparable en sus percentiles 5, 10, 20 y 40 a lo reportado para Estados Unidos en 1998, es decir 57(59), 70(71), 84(84) y 95(95%), con los valores de la cascada dados en paréntesis.<sup>2,9</sup>

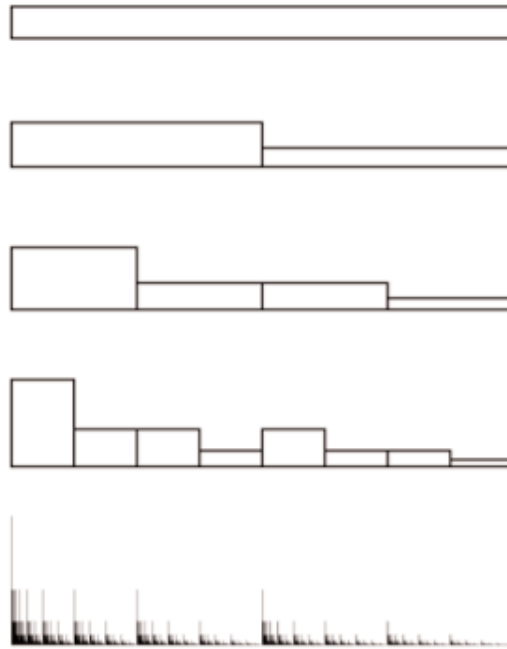


Figura 3. Una cascada multiplicativa clásica que sesga la energía por izquierdas en un factor 70-30%.<sup>2</sup>  
Los niveles 0 al 3 se grafican a escala, pero el nivel 12, debajo, se muestra comprimido.

Las desigualdades en el mundo son ciertamente una realidad, y la distribución acumulada de la riqueza en las naciones se ve tristemente más reflejada en las espigas multifractales producidas por una cascada que finalmente disipa, como en la Figura 3, que en la condición de uniformidad que responde al adagio de “que toda montaña sea cortada y todo valle rellenado”, es decir el nivel 0 antes que la cascada divisiva comience.

AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

Otro ejemplo fundamental en el que se halla una ley de potencias, concierne a la distribución de los conflictos humanos y las guerras. Tal y como lo notó por primera vez el físico, meteorólogo y pacifista Lewis Fry Richardson inmediatamente después de la segunda guerra mundial, la distribución acumulada del número de muertos, es decir la severidad de un conflicto, desde aquellos generados por luchas de pandillas hasta las grandes guerras, se alinean en una ley aproximada como se observa en la Figura 4.<sup>10</sup>

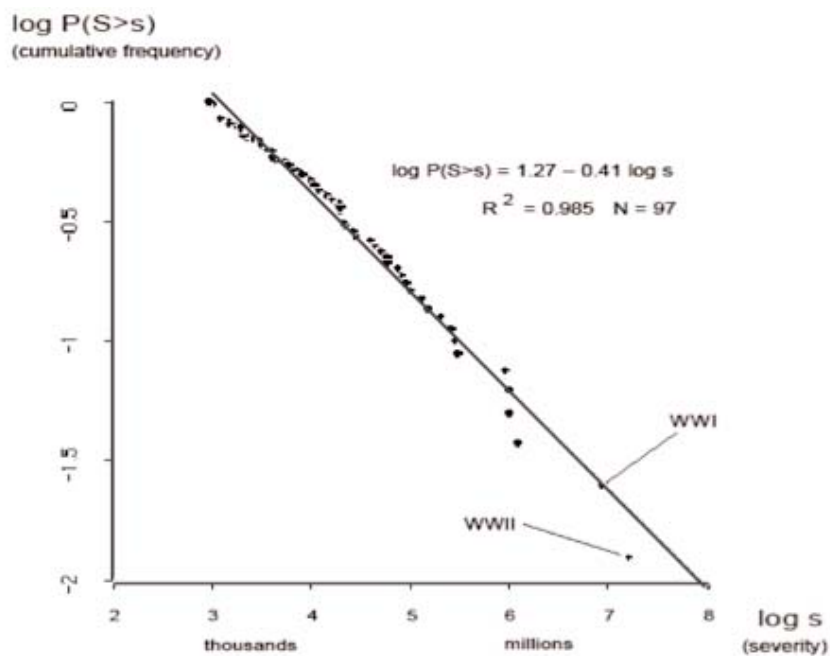


Figura 4. Distribución acumulada de guerras severas entre naciones.

Notablemente, o quizás no, todos los datos que reflejan nuestra violencia perversa están ajustados por una expresión lineal en escalas doble-logarítmicas, y esto nos recuerda potentemente que para poder realmente evitar la siguiente gran conflagración debemos acabar con los conflictos pequeños, incluidos en ellos, en virtud a la carencia de una escala característica, aquellos que se suceden dentro de nosotros mismos.<sup>5</sup>

### 3. Las Leyes de Potencia y la Búsqueda de la Paz

A partir de los resultados mostrados hasta ahora surgen elementos que sustentan nuestro sentido común y nuestra búsqueda de la paz. Como la violencia natural y también aquella generada por el hombre da lugar a leyes de potencia, es pertinente estudiar cómo ellas se producen para, al evitar dichos mecanismos, encontrar la armonía y la paz.

Dichas leyes, sencillas y divisivas a la vez, se hallan a partir de diversos procesos.<sup>11</sup> Éstas aparecen mediante las anteriormente mencionadas cascadas multiplicativas ilustradas en la Figura 3, por medio de las conexiones preferenciales típicas en las redes humanas, a partir de la llamada tolerancia altamente optimizada que refleja la desorganización en nuestro mundo moderno, y prominentemente, por medio de la célebre auto-organización crítica esbozada por el bosquejo mostrado en la Figura 5.<sup>12</sup> Allí se observa la implacable acumulación de energía que hace crecer una pila de arena en la playa hasta que su pendiente claramente excesiva, y por ende crítica, genera avalanchas predecibles de tamaños impredecibles y con una distribución dada por una ley de potencias.

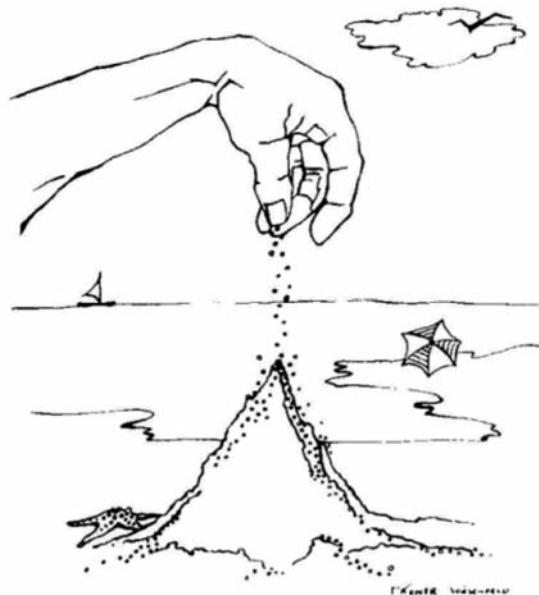


Figura 5. Una mano haciendo crecer una pila de arena para generar avalanchas.



AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

Como podemos observar por analogía, los males que nos aquejan no se deben necesariamente a una mano invisible que nos maneja, aunque acaso sí si nos dejamos, sino más bien a nuestras propias acciones divisivas que debemos rectificar si en efecto deseamos la paz. Pues tal y como se puede apreciar de una manera vívida, los humanos sin escala desafortunadamente abusamos de nuestra potencia esencial, y por medio de nuestro egoísmo y codicia, creamos, predeciblemente al mal acumular energías, las críticas leyes de potencia que producen no poco dolor y miseria.

De aquí se desprende que el mejor adagio sea: “que sea cero tu potencia” pues éste es el único caso, en la igualdad del equilibrio, que garantiza matemática y geoméricamente la unidad. Pues sólo extinguiendo nuestras leyes de potencia, por pequeños que sean nuestros exponentes, y por ende nuestros estados críticos siempre lejanos del equilibrio y al borde de la desintegración, podremos evitar el horrendo espiral egoísta negativo y el mismo número 6 que refleja nuestro triste grado de desconexión que impide una paz verdadera.<sup>13</sup> Pues existe en verdad una única solución y nosotros sabemos que ella no es  $2/3 = 0.666\dots$ , ya que debemos reparar nuestro mundo fractal abandonando el poder destructivo de las impotentes leyes de potencia para más bien abrazar el poder supremo de la carencia de poder en el servicio de unos a otros para construir la unidad. Pues los conflictos no pueden desaparecer si no lo hacen en nuestros corazones, a la escala más pequeña, pues una gran guerra es, al final, un conflicto pequeño que creció y creció.

Con respecto a las desigualdades económicas, acaso parte de la solución obvia se encuentra en el apellido de quien encontró dicha ley de potencia. Pues, si se parte la palabra “Pareto” y se interpreta con la apócope caribeña “pare tó” significando “pare todo”, podemos observar el primer paso requerido para evitar la dolorosa disipación prescrita por la física y la proliferación indeseada de la desunión. Pues aunque pareciera que existen mejores naciones que otras al comparar no solamente sus PIB sino también sus índices de Gini, es decir, la diferencia en área entre las distribuciones acumuladas de las desigualdades y de la equidad, son esas distribuciones acumuladas sesgadas, bien denominadas escaleras del diablo por su mentirosa ineficiencia,<sup>2,9</sup> las que reflejan el devenir insulso

de nuestro afán por el dinero, que, tal y como lo sabemos, constituye la raíz de todos los males.

Al final, de estas observaciones se desprende que la solución para la paz es la organización no preferencial del amor, o dicho empleando el espíritu del cálculo “*la integración sin diferenciación*”. Como dicha aseveración tiene sólo una solución en la función exponencial positiva,  $e^x$ , y con 1 como la derivada interna;<sup>14</sup> y como la función logarítmica es la inversa de la exponencial, podemos observar de una manera ingeniosa cómo la minimización de energía siempre presente en el egoísmo no domesticado genera leyes de potencia y cómo la inherente carencia de unión que produce violencia es en efecto una manifestación esencialmente diabólica que esboza tres simbólicas negaciones, en los dos logaritmos y en la línea aproximada con pendiente negativa.

Pues la palabra logaritmo proviene de cortar un número de acuerdo a una base, pero también significa, en inglés, el cortar o talar árboles para producir, por ejemplo, una cabaña de troncos, los cuales tienen la misma forma cilíndrica que representa, en español, la misma viga negativa en el ojo que refleja nuestra hipocresía. Después de todo, todas las leyes de potencia nombradas aquí nos permiten apreciar los efectos de acumular nuestras opciones equivocadas. Pues a pesar de sus altos coeficientes de determinación, y valga el uso sutil del lenguaje, las leyes naturales con ‘colas pesadas’ son solamente ilusiones falsas e incompletas de lo que es realmente recto. Pues aunque dichas leyes con supuesta potencia son ciertamente notables por su sencillez y universalidad, ellas representan, al final, sólo regresiones grotescas hacia la disipación y el terror que en nada se parecen al estado inmaculado y verdaderamente recto y unido al que estamos llamados.<sup>2,9</sup> Pues es una verdadera tontería el medir el valor de los seres humanos mediante números finitos y el olvidar que somos parte de una hermandad esencial.<sup>15</sup>

Estas lecciones a partir de las leyes de potencia son ciertamente sencillas y nos recuerdan que si abandonamos nuestra consciencia humana, terminamos pagando las justas consecuencias de nuestras avalanchas y cascadas. Pues para resolver los problemas que nos aquejan, debemos empezar por dejar de echarle la culpa a otros, incluido el mismo diablo. Estas ideas, acaso antiguas pero ciertas, son pertinentes en estos días en los que aceptamos la indiferencia de los

AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

vientos divisivos como algo ‘normal’, cuando creemos y nos guiamos por los falsos dogmas de ‘la competencia’, ‘la dominación’ y la ‘supervivencia del más fuerte’, y cuando el estrés natural y las distracciones superfluas de la vida moderna han oscurecido la verdadera razón amorosa de nuestra existencia. ¿Acaso no estamos jugando con fuego al no tener en cuenta la metáfora, antes mencionada y explícita en las leyes de potencia, que una conflagración no sabe cuán grande ha de ser antes de comenzar?

No existe otra manera de hacerlo, debemos regresar a ser como niños, creciendo nuestra verdadera determinación a la unidad  $1=0.999\dots$ . Esto es, maximizando nuestras energías, de modo que nos convirtamos en buenos amigos y podamos jugar juntos. Pues tal y como se muestra en estudios recientes, aún si ellos miden con cierta dificultad lo que intentan cuantificar, el jugar en los mercados del dinero y también del sexo produce leyes de potencia funestas,<sup>16</sup> mientras que la amistad en las redes sociales da lugar más bien a comportamientos exponenciales, definidos por distribuciones gaussianas o normales.<sup>17</sup>

En el mismo espíritu de estas ideas, a continuación se presenta un procedimiento geométrico que intenta capturar la complejidad natural y que permite contrastar aún más las leyes de potencia y la distribución normal y la relación que ellas tienen con la paz.

#### 4. Una Visión Platónica de la Complejidad Natural

La iteración de reglas sencillas definidas en dos o más dimensiones y dando lugar a funciones de una línea a una línea, o de una línea al plano, o de una línea a un volumen, representan la base de un procedimiento determinista que produce patrones complejos tales y como se observan en la naturaleza.<sup>18, 19</sup>

La Figura 6 muestra un ejemplo de dichas ideas cuando se emplean las dos reglas,

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cuando ellas se iteran de acuerdo a una moneda cargada con proporción 70-30% y cuando los escalamientos verticales  $d_n$  toman los valores  $d_n = -d_2 = z = 0.5$ .

Como se observa, los cálculos, punto por punto, producen una función continua, que va de la línea  $x$  a la línea  $y$ , y que luce como el perfil de una montaña. Dicha función es técnicamente el único punto fijo de las dos reglas, y dicho alambre es tal que interpola los tres puntos  $\{(0,0), (0.5,1), (1,0)\}$ . También mostradas en la Figura 6 están las distribuciones inducidas tanto en  $x$  como en  $y$  durante el proceso de cálculo, es decir los histogramas  $dx$  y  $dy$ , que se relacionan el uno al otro mediante la función mostrada.

Como las reglas empleadas son tales que su coordenada  $x$  no depende de  $y$  y como  $w_1$  opera a la izquierda de  $1/2$  y  $w_2$  a la derecha de  $1/2$ , los puntos en  $x$  están regidos por la cascada multiplicativa anteriormente mostrada en la Figura 3 y  $dx$  es el mismo objeto multifractal espinoso y eventualmente disipado relacionado con la turbulencia. De otro lado,  $dy$  depende, de una forma no trivial, de las ‘arrugas’ del alambre, y está definido como el histograma derivado a partir de  $dx$  mediante la función de  $x$  a  $y$ .<sup>19</sup>

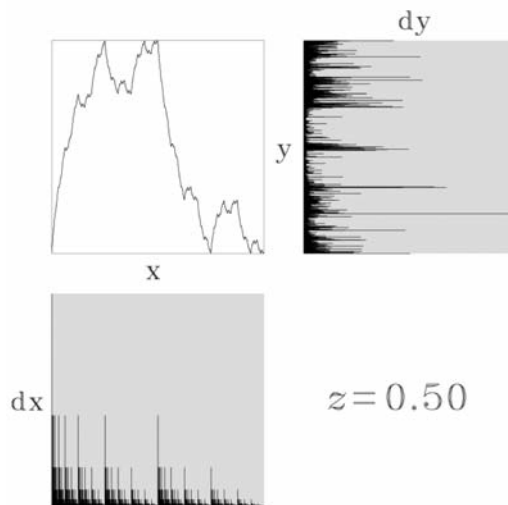


Figura 6. Un procedimiento platónico para modelar la complejidad natural.

Como se puede apreciar,  $dy$  es claramente intermitente, se parece geométricamente a diversas mediciones de procesos geofísicos y es además tan complejo que parece estar guiado por el azar. Sin embargo, dicho objeto resulta ser un objeto determinista, pues proviene al final, aún si se emplea un método de simulación Monte Carlo para calcularlo, de un par de objetos deterministas, es decir, el multifractal de ‘entrada’  $dx$  y el alambre de  $x$  a  $y$ .<sup>18</sup> Como la gráfica de

AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

$x$  a  $y$ , dependiendo de los escalamientos  $d_n$  puede ser un objeto fractal de longitud infinita, cuya dimensión puede ser un número entre 1 y 2 ( $D \rightarrow 2$  cuando  $|d_1| \rightarrow 1$ ,  $|d_2| \rightarrow 1$ ), al procedimiento en la Figura 6 que produce a  $dy$  como ‘salida’ se le denomina fractal-multifractal.<sup>19</sup>

Estas ideas esbozan un enfoque platónico de la complejidad natural, pues en el mismo espíritu de la famosa alegoría del cavernícola en La república, lo que observamos como un  $dy$  bien puede ser sólo una ‘sombra’ proveniente de ‘realidades’ mayores; es decir, el alambre de  $x$  a  $y$ , y mediante una ‘iluminación’ adecuada, en este caso  $dx$ . Las ideas son también platónicas en un sentido romántico, pues de ellas surge el dilucidar si la complejidad natural puede ser en efecto sólo una sombra producida por alambres e iluminaciones específicas, y esto teniendo en cuenta que dichos conjuntos complejos bien pueden estar plenamente caracterizados por medio de pocos parámetros geométricos.<sup>19</sup>

Para ilustrar que en efecto las ideas producen muchos patrones complejos interesantes, la Figura 7 incluye diversas sombras, técnicamente proyecciones, que provienen de diversos alambres infinitos que tienen dimensiones fractales  $D = 1.485$  y que interpolan los puntos  $\{(0,0), (0.5, y_1), (1,-0.2)\}$ , variando la altura del punto medio  $y_1$ , de arriba a abajo, de  $-0.95$  a  $0.25$  en incrementos de  $0.2$ , y siempre empleando una iluminación multifractal 30-70%.<sup>19</sup> Como puede verse, el procedimiento fractal-multifractal genera objetos con variadas tendencias e intermitencias, y las estadísticas mostradas en sus funciones de auto-correlación y sus espectros de potencia, éstos últimos graficados en escalas doble-logarítmicas que reflejan leyes de potencia con diversos exponentes, son similares a las obtenidas en la naturaleza.

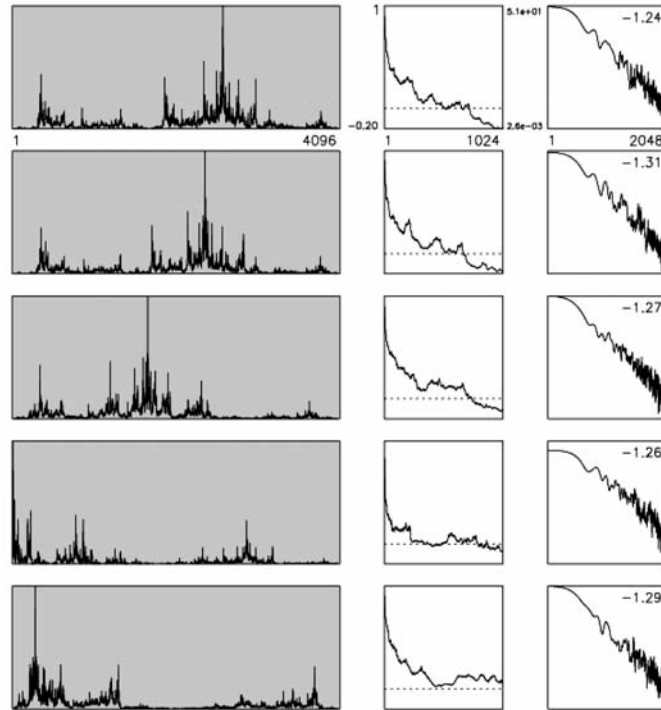


Figura 7. Algunas sombras platónicas y sus estadísticas.<sup>19</sup>

Las ideas se pueden generalizar de manera que la iteración de reglas, igualmente sencillas pero con más coordenadas, produzca un alambre definido, ya sea de una línea a un plano, de  $x$  a  $(y,z)$ , o de una línea a un volumen, de  $x$  a  $(y,z,w)$ . Esto se logra conservando una estructura desacoplada en la coordenada  $x$  de las reglas y reemplazando los escalamientos verticales por parámetros adicionales, que en el caso de una línea al plano se pueden expresar en coordenadas polares como

$$D_n = \begin{pmatrix} r_n^{(1)} \cos \theta_n^{(1)} & -r_n^{(2)} \sin \theta_n^{(2)} \\ r_n^{(1)} \sin \theta_n^{(1)} & r_n^{(2)} \cos \theta_n^{(2)} \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, N,$$

donde  $N$  es el número de reglas a iterar, lo cual puede ser, en general, más de dos.

Al final, estas nociones permiten calcular sombras ya sea sobre el plano  $(y,z)$  o sobre el volumen  $(y,z,w)$  y a partir de alambres cuyas dimensiones fractales pueden estar entre 1 y 3 o entre 1 y 4. Tal y como lo ilustra la Figura 8, estas

AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

ideas Platónicas generan otros objetos complejos que evocan aquellos encontrados en la naturaleza, tal y como se observa, por ejemplo, en la estructura de un contaminante en el subsuelo.

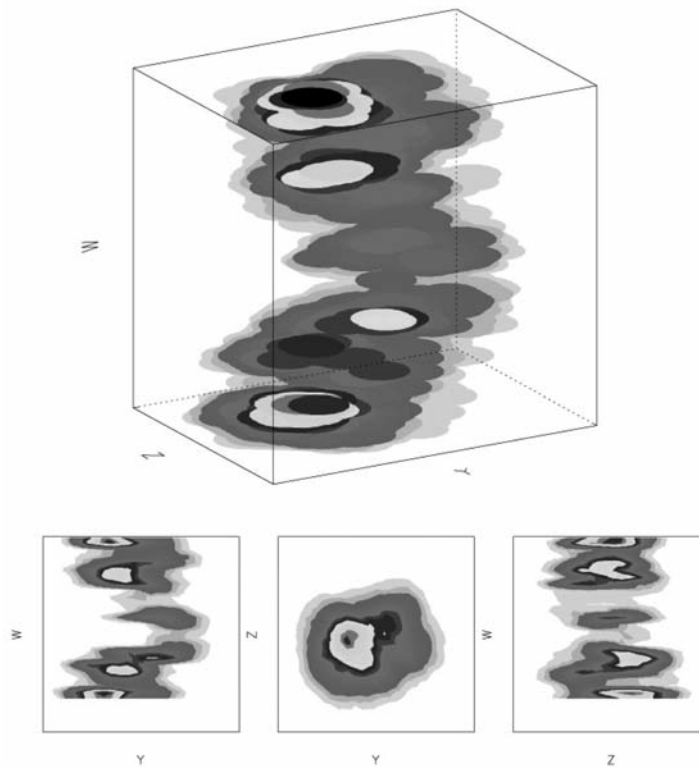


Figura 8. Sombras provenientes de un alambre de  $x$  a  $(y,z,w)$  uniformemente iluminado.<sup>19</sup>

## 5. La Campana de Gauss como una Sombra

Cuando un alambre llena más y más espacio, sus crecientes arrugas integran más y más la iluminación inicial y así dan lugar a sombras cada vez menos intermitentes y complejas. Cuando dichas funciones llenan todo el espacio disponible, la integración es máxima y comúnmente se generan, de una forma notable, sombras gaussianas.

Tal y como se ilustra en la Figura 9, para el caso de un alambre de  $x$  a  $y$  que extiende el caso de la montaña en la Figura 6 con  $d_1 = -d_2 = z = 0.999$ , en el límite, cuando  $D \rightarrow 2$ , se halla una sombra lisa, cuya ecuación estandarizada es la misma curva normal  $dy(y) = 1/\sqrt{2\pi} e^{-y^2/2}$ , a partir del mismo multifractal relacionado con la turbulencia.<sup>20</sup>

Este resultado resulta ser sorprendentemente universal, pues el mismo alambre máximo infinito ( $z \rightarrow 1$ ) produce campanas como sombras para cualquier iluminación difusa en  $x$ , es decir, para cualquier entrada no discreta  $dx$ . Esto implica que se halla una curva normal, no la misma, claro está, para cualquier sesgo de la moneda usada en las iteraciones, y también si se emplean como  $dx$  una infinidad de iluminaciones que no provienen directamente de cascadas multiplicativas, como por ejemplo, todas las mostradas en la Figura 7 y todas aquellas definidas sobre dominios vacíos cantorianos.<sup>21</sup>

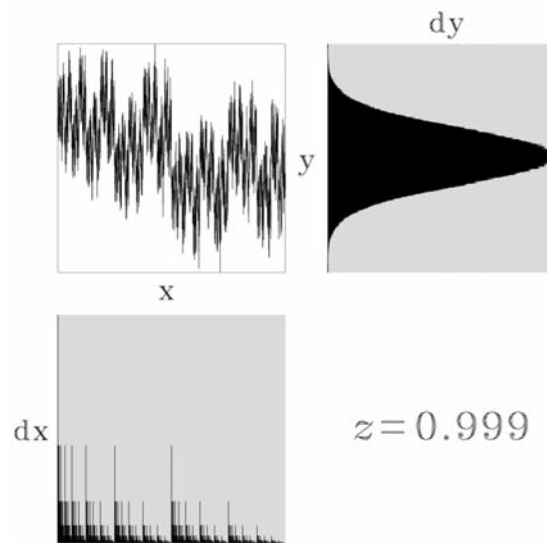


Figura 9. De un multifractal a la campana de Gauss mediante un alambre que llena el plano.<sup>22</sup>

Estos resultados implican que dicho alambre límite provee un puente insospechado y determinista entre el desorden espinoso y polvoriento de cualquier entrada, incluida cualquier ley de potencia en  $x$ , y el orden armónico e integrador de la campana.

Tal y como se muestra en la Figura 10, en los casos límite multidimensionales se obtienen típicamente resultados similares. A partir de un multifractal  $dx$  y mediante un alambre de  $x$  a  $(y,z)$ , se halla una campana bi-dimensional como sombra sobre  $(y,z)$ .



AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

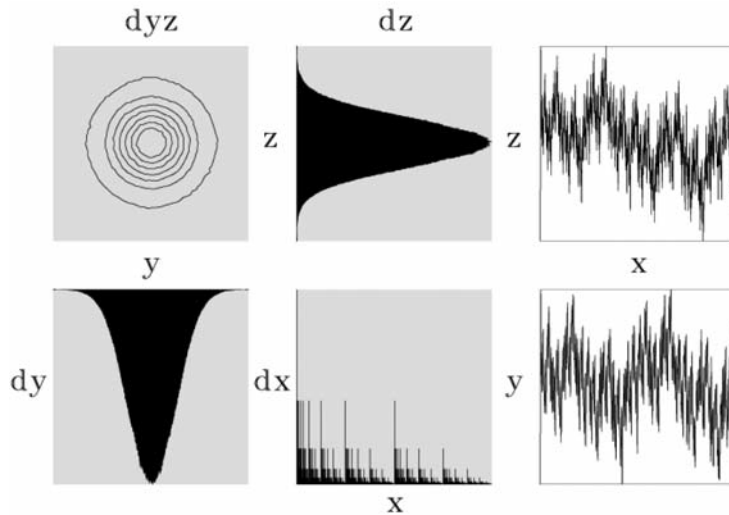


Figura 10. De un multifractal arbitrario a una campana de Gauss bi-dimensional.

Las condiciones que dan lugar a campanas bi-dimensionales, no siempre circulares, se relacionan con las normas de las matrices anteriormente introducidas,  $D_n$ , las cuales deben tender nuevamente al valor límite de 1. Esto implica que todos los ‘escalamientos’  $r_n^{(j)}$  deben tener magnitudes que también tienden a 1 y que los ángulos  $\theta_n^{(j)}$  deben estar debidamente acoplados.<sup>20</sup>

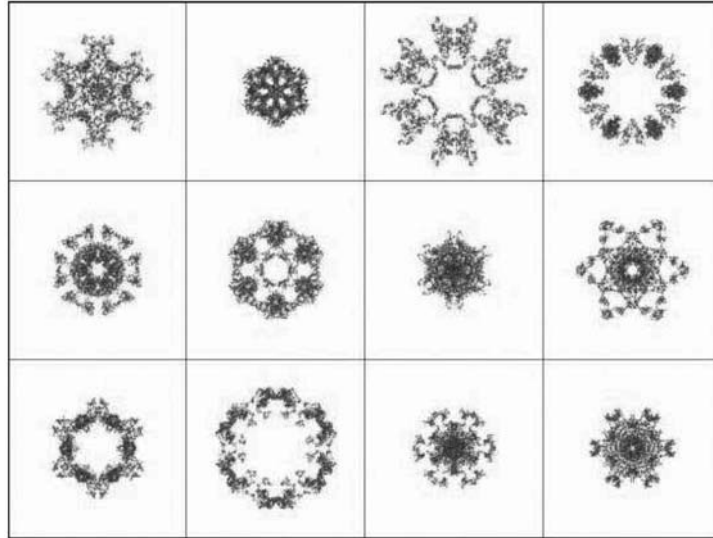
Dado que la campana se relaciona con la conducción del calor mediante el proceso de difusión y la ley de Fourier, los alambres de las Figuras 9 y 10 terminan invirtiendo el orden físico prescrito, pues ellos cambian vívidamente la disipación implícita en las cascadas multiplicativas turbulentas por el mantenimiento de la energía y, por ende, transmutan la violencia en la calma. Este es un resultado bello e inesperado que, como se verá más adelante, provee, en un caso aún más sublime, pautas amorosas hacia la paz.

## 6. La Belleza Exótica dentro de la Campana de Gauss

Como lo mostrado en la Figura 10 y similares es el resumen de iterar las reglas del caso muchas veces, por ejemplo 15 millones, es relevante estudiar cómo se forman los círculos o elipses que conforman la campana en grupos sucesivos de, por ejemplo, 20.000 puntos.

La Figura 11 muestra un ejemplo de lo hallado al iterar dos reglas cuando los ángulos  $\theta_n^{(j)}$  son iguales a 60 grados, cuando la magnitud de los escalamientos  $r_n^{(j)}$

es igual a 0.9995 y cuando se emplea como entrada una iluminación multifractal 70-30%. En el límite se encuentran descomposiciones exquisitas de la campana bi-dimensional.



*Figura 11. Descomposiciones de la campana de Gauss bi-dimensional.  
De arriba abajo y de izquierda a derecha.*

La imágenes aquí mostradas son sólo un ejemplo de una infinidad de patrones, claramente estéticos, que al superponerse forman círculos perfectos y campanas certeras, cuyas simetrías dependen de los ángulos  $\theta_n^{(j)}$  y los signos de los escalamientos  $r_n^{(j)}$ , y cuyas geometrías específicas e inesperadas dependen de la secuencia precisa empleada en las iteraciones; es decir, de la sucesión obtenida al lanzar la moneda.<sup>20</sup> En el límite central mostrado, y valga la relación con el famoso teorema, existe un orden oculto en el azar que expresa una belleza vital que aparece como viajando ‘de gloria en gloria’, como una manifestación enamorada que filtra sin dudar cualquier entrada por compleja que sea.

Como lo ilustra la Figura 12, la estructura geométrica de los cristales de hielo se encuentra representada como un diseño dentro de la campana de Gauss. Estos ejemplos fueron hallados rellenando plantillas de cristales conocidos paso a paso, empleando dos reglas con ángulos iguales a 60 grados construyendo secuencias de iteraciones adecuadas a partir de grupos guiados por monedas justas, es decir, con proporciones 50-50%.

AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

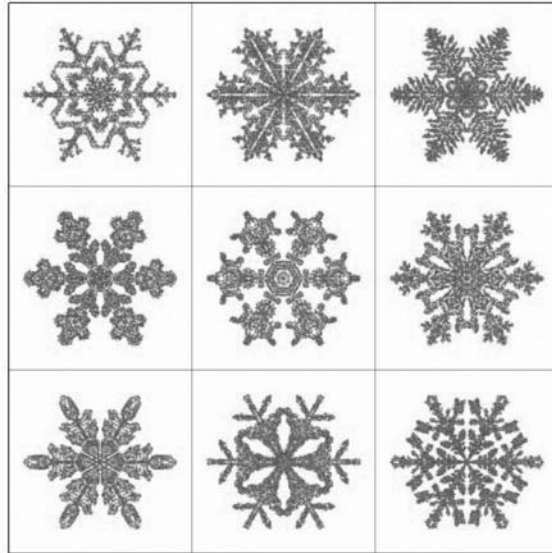


Figura 12. Cristales de hielo en la campana de Gauss bi-dimensional.<sup>20</sup>

Como se puede observar en la Figura 13, la campana contiene, en verdad, una plétora de cristales de hielo, éstos obtenidos empleando los dígitos binarios del número omnipresente  $\pi$ , incluido en la fórmula misma de la curva normal, para guiar las iteraciones. Aquí se observan bellos cristales en forma de estrella y sector que contienen 100.000 puntos, y cuyas formas dependen íntimamente de la secuencia de 0's y 1's empleada. Al final estos cristales, como en la naturaleza, crecen por difusión y como ellos sólo aparecen en el límite en el cual el alambre llena el espacio, se puede decir que ellos nacen sólo en la plenitud de la dimensión.<sup>23</sup>

La campana también incluye, simplemente variando los ángulos, rosetones que se ajustan a diversos compuestos bioquímicos. Prominentemente, el mostrado a la derecha en la Figura 14 se halla empleando dos reglas con ángulos iguales a 36 grados e iterándolas, nuevamente, de acuerdo a la expansión binaria de  $\pi$ . A la izquierda se observa el rosetón con 10 puntas del ADN de la vida. Así, la campana provee un diseño improbable de dicha geometría, uno que depende de la precisa sucesión de los primeros 40.000 bits de  $\pi$ .<sup>20</sup>

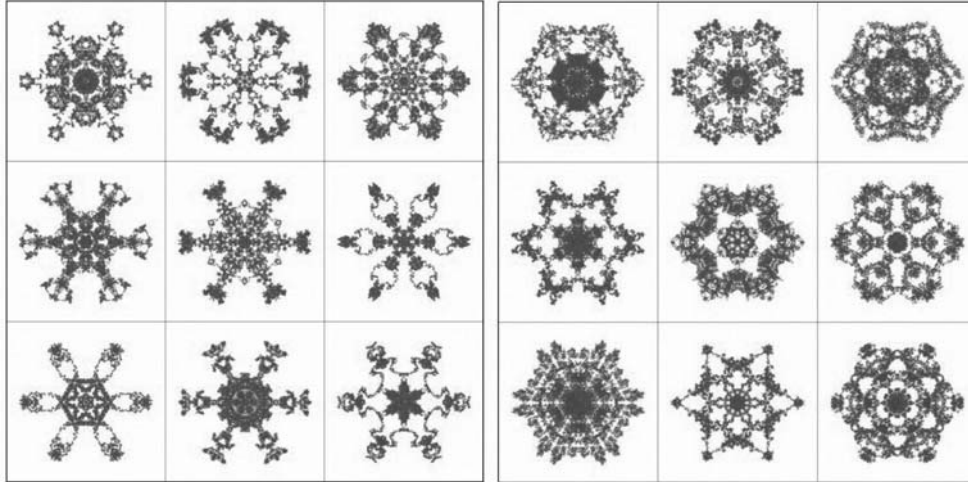


Figura 13. Cristales de hielo en la campana generados por la expansión binaria de  $\pi$ .<sup>23</sup>

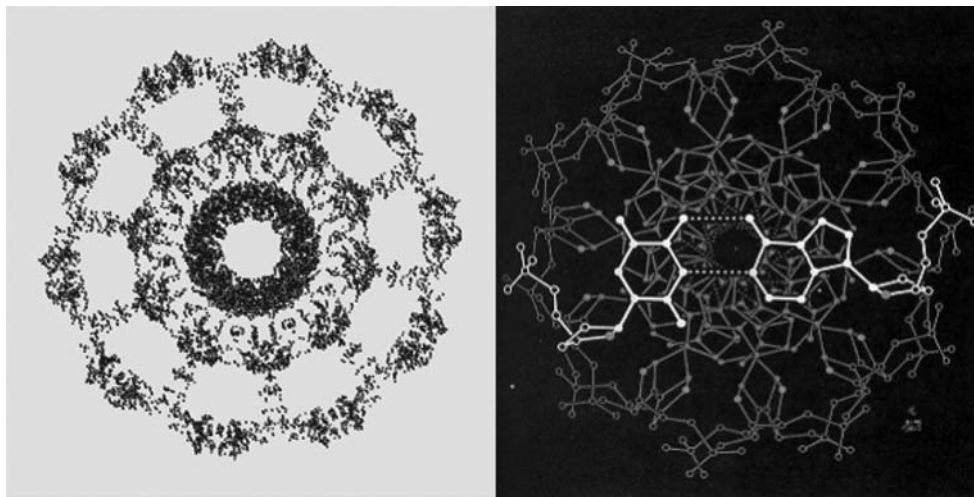


Figura 14. Rosetón del ADN izquierda y una representación dentro de la campana por medio de  $\pi$ .

## 7. Una Campana Especial para la Paz

Los resultados aquí mostrados con relación a la famosa campana de Gauss son particularmente sugerentes, no sólo por la peculiarmente sencilla transformación que dota una belleza inesperada en los múltiples tesoros geométricos que se encuentran dentro de ella, sino también por su conexión, por medio del célebre teorema del límite central antes mencionado, con los conceptos de integración e independencia.

AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

Ciertamente, el que exista la posibilidad de cambiar las disipadas leyes de potencia en expresiones serenas y conductoras, que además están compuestas por una belleza exótica y juguetona, nos invita a una condición amorosa de unidad y normalidad bien reflejada en inglés por la expresión “to be in cloud 9”, la cual se relaciona, por definición, con la paz.

Pero no toda transformación límite resulta ser igualmente provechosa, pues los signos de los escalamientos producen diversos comportamientos como sigue. Para un alambre de  $x$  a  $y$ , cuando los parámetros  $d_1$  y  $d_2$  son ambos negativos y  $-d_1 = -d_2 = z \rightarrow 1$ , no se encuentra una campana, sino dos que oscilan al poseer dos medias distintas y finitas. Se halla aquí algo que a lo lejos parece ser una única campana pues las varianzas de las dos curvas normales tiende a infinito, pero en este caso, plagado de oscilaciones, no se halla convergencia.<sup>24</sup> Para alambres de  $x$  a  $(y,z)$ , existen a su vez diversos casos, en función de los signos de los escalamientos  $r_n^{(j)}$ , que en el límite producen, en función de los ángulos  $\theta_n^{(j)}$ , no una, sino un número arbitrario de campanas que viajan para siempre siguiendo un polígono regular dentro de un círculo,<sup>24</sup> como órbitas periódicas que no hallan su centro.<sup>3</sup>

Ciertamente, el caso más común corresponde al mostrado en las Figuras 9 y 10 y es la presencia de una campana con medias finitas y las varianzas no normalizadas infinitas, tanto en una dimensión,  $d_1 = -d_2 = z \rightarrow 1$  ó  $-d_1 = d_2 = z \rightarrow 1$ , como en dos dimensiones, para diversas combinaciones de signos en los escalamientos  $r_n^{(j)}$ . Pero existen, notablemente, casos que son aún más hermosos, casos que son aún más formidables.

Para alambres de  $x$  a  $y$ , cuando el parámetro  $z$  tiene un efecto positivo en ambas funciones,  $d_1 = d_2 = z \rightarrow 1$ , se halla, tal y como lo muestra la Figura 15 para  $z = 0,99$ , un alambre en forma de nube y no de montaña (o acaso las alas de un ángel), y ahora el límite, construido simplemente mediante adiciones positivas de potencias de  $z \rightarrow 1$ ,<sup>25</sup> define universalmente una misma campana que, a pesar de tener nuevamente una varianza infinita, se termina concentrando, con toda probabilidad, en un valor medio en el infinito. Este comportamiento ocurre similarmente en varios casos siempre positivos que pasan por otros puntos en el plano y también para alambres similares de  $x$  a  $(y,z)$ , pues, en este último caso, también existen límites que generan campanas que, aunque no incluyen patrones exóticos dentro de ellas, se concentran singularmente en el punto  $(\infty, \infty)$  para cualquier iluminación difusa  $dx$ .<sup>24</sup>

Como estos alambres contrastan vívidamente lo positivo y lo negativo, las nubes y las montañas, y lo infinito y lo finito, podemos observar en ellos un antídoto certero de la complejidad en una transformación superior que sirve como un espejo extraordinario en el que podemos apreciar la esencia sin límite de nuestras almas y la razón de nuestros sueños. Pues de una manera mística, esta nube colosal y misericordiosa, conformada por adiciones siempre máximas y unitivas, invita a subir al cielo al son de una campana que expresa la libertad completa, y lo hace con tal fortaleza que filtra todo desorden y anula la entropía de cualquier entrada no-discreta, es decir de cualquiera de nosotros si lo permitimos. ¡Oh santas buenas nuevas las expresadas por dicho alambre angelical!

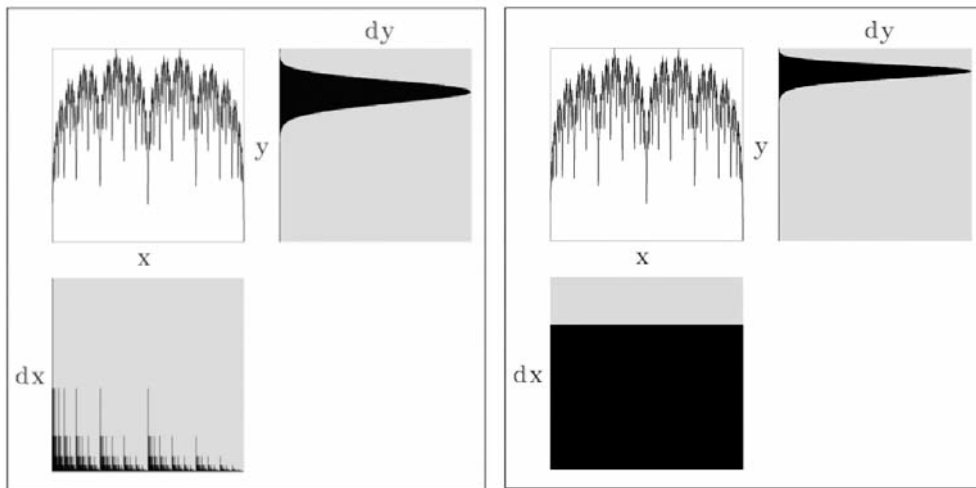


Figura 15. Desde un multifractal y una distribución uniforme a una campana concentrada en el infinito.<sup>26</sup>

¿Cómo no apreciar en ésta transformación imponente, una que milagrosamente transfigura la oscura disipación en una luminosa conducción y que integra toda espina en la campana unitiva, una invitación a lo inefable, a un círculo cerrado en el infinito, a mansiones celestiales? Pues aunque las escaleras del diablo, las leyes de potencia y el caos en general parecen refrendar la falsa afirmación del enemigo común, quien asegura que no hay escapatoria de la disipación de la muerte, en la direccionalidad del diagrama de  $x$  a  $y$ , y también en alambres multidimensionales similares, podemos exclamar a partir de un multifractal soportado por el polvo, como en la Figura 15 a la izquierda, “¿dónde está, oh disipación, oh muerte, tu victoria?, ¿dónde está, oh ley de potencia, tu aguijón?”

Al final, y contrario a lo que se observa en muchas redes humanas y en otras redes naturales que son regidas por el desamor, la solución implicada por la cam-



AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

pana singular es el camino normal y no precedero definido nuevamente por la organización no preferencial del amor, ahora expresada por el adagio equivalente “que tu transformación sea positiva y máxima,” o dicho de otra manera “que el amor pleno te llene plenamente para que libremente lo puedas compartir con los demás.” Pues a partir del triunfo sereno y equitativo obtenido al cortar las montañas y rellenar los valles y que define acumulando una recta hipotenusa con fórmula  $X=Y$  y una fehaciente  $\sqrt{2}$ ,<sup>2,3</sup> podemos apreciar una unidad trinitaria, como en la Figura 15 a la derecha, en la que, por la máxima dimensión unitiva del espíritu de amor siempre positivo y sanador, triunfa la vida sobre la muerte, para que nosotros, con debida razón y humildad, alabemos para siempre repitiendo “gloria a Dios en las alturas y en la tierra paz a los hombres en quienes Él se complace.”

Para resumir, a continuación se incluye la letra de una poesía-canción.

### La transformación

Hay una transformación  
ay que vence la agonía,  
existe sólo una oblación  
ay que enciende la alegría.

Hay una transformación  
ay que derrota la entropía,  
existe sólo una oblación  
ay que engendra la armonía.

Hay una transformación  
ay que excluye la rebeldía,  
existe sólo una oblación  
ay que incita a la poesía.

Hay una transformación  
ay que derroca la cobardía,  
existe sólo una oblación  
ay que regala toda cuantía.

Hay una transformación  
ay que es santa sabiduría,  
ay mira sólo esa oblación  
a la noche vuelve día.

**Ay sólo el amor... (3)**

Ay te digo verdad  
esto no es teoría.

**El poder del amor  
transforma tu día.**

Pero sólo positivo  
dejando bobería.

**El poder del amor  
transforma tu día.**

Dota toda potencia  
esto no es fantasía.

**El poder del amor  
transforma tu día.**

Pero pleno no más  
con toda valentía.

**El poder del amor  
transforma tu día.**

Ay todo puede mira  
su canto es letanía.

**El poder del amor  
transforma tu día.**

En toda la unidad  
está su compañía.



AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

**El poder del amor  
transforma tu día.**

**Ay sólo el amor... (3)**

Es todo poderoso  
y enciende la alegría.

**Ay sólo el amor  
te sana y te guía.**

Ay todo lo provee  
no exige regalía.

**Ay sólo el amor  
te sana y te guía.**

Te lo digo amigo  
derrota la entropía.

**Ay sólo el amor  
te sana y te guía.**

Se oye ay su ritmo  
trinando todo el día.

**Ay sólo el amor  
te sana y te guía.**

Ay acoge lo de más  
como lo hizo María.

**Ay sólo el amor  
te sana y te guía.**

Es mira fuego eterno  
bautizo de poesía.

**Ay sólo el amor  
te sana y te guía.**

Carlos E. Puente

Hay una transformación  
ay que es santa sabiduría,  
ay mira sólo esa oblación  
a la noche vuelve día.

**Ay sólo el amor... (3)**

$$\text{stick figure} = 0.999\dots = 1$$

## Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a mis hijas Cristina y Mariana, como testimonio de la fe que fue creciendo al meditar en el trino  $\pi$ , 2 y  $e$ , especialmente una vez fui providencialmente salvado por la misma campana celestial que los integra.

## Referencias y Notas

1. Este trabajo es una versión aumentada de Carlos E. PUENTE: «Yet more lessons from complexity – Unity: the key of peace», *E:CO*, 8.4 (2006): 104-11, similar a lo presentado en el IV Seminario Bienal Internacional acerca de las Implicaciones Filosóficas, Epistemológicas y Metodológicas de la Teoría de la Complejidad, La Habana, Cuba (2008).
2. PUENTE, Carlos E.: «Lecciones a partir de la complejidad. La hipotenusa el camino de la paz», *Complexus*, 1.3: (2005) 32-53.
3. PUENTE, Carlos E.: «Más lecciones a partir de la complejidad. Una parábola perenne y acaso urgente en la teoría del caos», enviado a *Complexus* 11: (2009).
4. TURCOTTE, Donald L.: *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press, 1997.
5. BUCHANAN, M.: *Ubiquity*, New York: Crown Publishers, 2001.
6. MALAMUD, Bruce: «Tail of natural hazards», *Phys. World* 17.8 (2004): 31-35.
7. DI GUILMI, Corrado, Edoardo GAFFEO y Mauro GALLEGATI: «Power law scaling in the world income distribution», *Econ. Bull.* 15.6 (2003): 1-7.
8. DE SOTO, Hernando: *The Mystery of Capital*, New York: Basic Books, 2000.
9. PUENTE, Carlos E.: *La Hipotenusa, Una Parábola Científica Ilustrada para Tiempos Turbulentos*, Author House, 2006.
10. CEDERMAN, Lars-Erik: «Modeling the size of wars: From billiard balls to sandpiles», *Amer. Pol. Sci. Rev.* 97(2003): 135-150.
11. SORNETTE, Didier: *Critical Phenomena in Natural Sciences*, Springer, 2004.
12. BAK, Per: *How Nature Works*, New York: Copernicus Press, 1996.
13. WATTS, Duncan J.: *Six Degrees: The Science of a Connected Age*, New York: W. W. Norton, 2003.

14. El algoritmo requerido para hallar el número  $e$ , el cual simboliza por su dirección un espiral positivo y amoroso como el número 9, se halla mediante el límite  $(1 + 1/x)^x$  cuando tiende a infinito, tal y como aparece en la famosa alegoría de la vid y los sarmientos, es decir y , en el capítulo 15 del Evangelio según San Juan.
15. La auto-organización crítica en inglés está dada por la sigla SOC, “self-organized criticality”. Cuando se aplica dicho término a nosotros los humanos debería más bien llamarse SOS, “self-organized stupidity”, pues así se reflejarían mejor nuestras adicciones y nuestras necesidades.
16. LILJEROS, Fredrik; Christofer R. EDLIN; Luís. A. NUNES AMARAL; H. Eugene STANLEY e Yvonne ÅBERG: «The web of sexual contacts», *Nature* 411 (2001): 907-908.
17. NUNES AMARAL, Luís A.; A. SCALA; M. BARTHÉLÉMY y H. Eugene STANLEY: «Classes of small-world networks», *PNAS* 97.21(2000): 11149-11152.
18. BARNSLEY, Michael F.: *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
19. PUENTE, Carlos E.: «A universe of projections: may Plato be right?» *Chaos, Solitons Fractals* 19 (2004) : 241-253.
20. PUENTE, Carlos E.: *Treasures Inside the Bell*, World Scientific, 2003.
21. PUENTE, Carlos E.; M. M. LÓPEZ; J. E. PINZÓN y J. M. ANGULO, «The Gaussian distribution revisited», *Advances in applied probability* 28.2 (1996): 500-524.
22. La figura mostrada comprime verticalmente el alambre y la campana en un factor de 64, pues el rango del alambre es [-31.6, 32.4].
23. PUENTE, Carlos E. y M. G. PUENTE: «Ice crystals inside the bell», *Visual Math.* 6.1: (2004).
24. PUENTE, Carlos E.; A. CORTIS y B. SIVAKUMAR: «Bells galore: Oscillations and circle-map dynamics in space-filling fractal functions», *Fractals* 16.4 (2008): 367-378.
25. La transformación de la Figura 15 pasa por los puntos genéricos (0,0), (1/2,1) y (1,0). Los demás puntos de dicha ‘nube’ se hallan como sigue. Primero se unen los tres puntos y se generan otros dos subiendo  $z$  a partir de los puntos medios de dichas líneas. Luego se unen estos cinco puntos de izquierda a derecha y se obtienen otros cuatro a partir de los puntos medios de dichas líneas subiendo  $z^2$ . El procedimiento se repite ad infinitum siempre subiendo y en potencias de  $z$  y de modo que  $z \rightarrow 1$ .

AUN MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.  
DE LAS LEYES DE POTENCIA Y LA FORTALEZA DE UNA CAMPANA

26. El alambre y las campanas están altamente comprimidos. La escala vertical del alambre es 57 veces más grande que la horizontal. La campana a partir de la distribución uniforme tiene una escala 11.5 veces más grande que la de la distribución uniforme y la campana a partir del multifractal es 3 veces más pequeña que el valor máximo del multifractal, cuya escala es 21 veces más grande que la de la distribución uniforme.