UNA INTRODUCCIÓN A LOS FRACTALES Y A LA COMPLEJIDAD

Carlos E. Puente

Department of Land, Air and Water Resources

University of California, Davis

http://puente.lawr.ucdavis.edu

Resumen

- *Recuerda los diferentes tipos de números: naturales, enteros, racionales y reales.*
- *Repasa el concepto de la dimensión para puntos, líneas, planos y volúmenes.*
- *Muestra ejemplos de objetos fractales, incluyendo el polvo de Cantor, la curva de Koch y el triángulo de Sierpinski.*
- *Contrasta el orden con el caos mediante la curva logística.*
- *Introduce leyes de potencia naturales y el modelo crítico auto-organizado.*

- Antes de introducir los *fractales* y otros conceptos asociados con la *complejidad*, es conveniente hablar acerca de los números.

- El primer conjunto que aprendemos cuando somos niños son los números **naturales**,

$$1, 2, 3, \cdots$$

- Este conjunto es *infinito*, y entendemos lo que significa “punto, punto, punto”.

- Luego está el conjunto de los **enteros**, los que incluyen a los naturales, al cero, y a los negativos,

$$\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

- Este conjunto también es infinito, pero no es más grande que el anterior, pues los enteros se pueden listar, i.e., 0 es el *primero*, 1 es el *segundo*, -1 es el *tercero*, 2 es el *cuarto*, -2 es el *quinto*, etcétera, “danzando” de izquierda a derecha.

- El **infinito** es ciertamente un concepto peculiar, pues hemos mostrado que

$$2 \cdot \infty + 1 = \infty \quad (!)$$

- El siguiente conjunto de números que aprendemos son los **racionales**, las fracciones, i.e., los cocientes de enteros denotados por p/q.

- Algunos ejemplos de estos números son,

$$
\begin{aligned}
1/2 &= 0.5000\cdots \\
2/3 &= 0.666\cdots \\
1/11 &= 0.090909\cdots
\end{aligned}
$$

- Como se observa, las fracciones contienen un patrón repetible en su expansión decimal, i.e., los 0's, los 6's o los 09's.

- A veces tal *"estado estable"* se encuentra inmediatamente, como en $2/3$ y $1/11$, o aparece luego de un *"transitorio"* finito, e.g., $1/2$ produce un 5 antes de descansar en infinitos 0's.

- Al final, los dígitos de un número racional p/q son completamente **predecibles,** porque el transitorio y el estado estable del número definen el resto de la expansión.

- Aunque las expansiones para estos números son infinitas, podemos "racionalizar" aquí lo que significa "punto, punto, punto".

- Las fracciones conforman otro conjunto infinito, pero, de una forma sorprendente, existe el mismo número de naturales y de racionales, pues éstos se pueden listar diagonalmente,

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & \longrightarrow & 2 & & 3 & \longrightarrow & 4 & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

- Esto corrobora que el infinito tiene sus propias reglas, porque

$$\infty \cdot \infty = \infty \quad (!)$$

- Pero no todos los números son fracciones, pues hay muchos otros cuya expansión decimal no exhibe repeticiones finitas.

- Estos números se llaman **irracionales** y existen tántos de ellos que ni siquiera se pueden contar, i.e., éstos están asociados con un infinito “más grande”. (!)

- Se destacan entre ellos de una forma prominente,

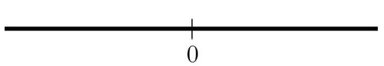
$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.41421356\cdots \\ \pi &= 3.14159265\cdots \\ e &= 2.71828183\cdots \end{aligned}$$

  los cuales están asociados con **cuadrados, círculos** y **espirales**.

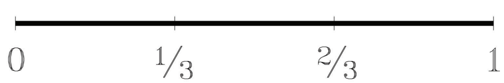
- Como estas expansiones no contienen repeticiones, *no es posible predecir* el siguiente dígito. Por lo tanto, "punto, punto, punto" describe un "misterio" interno para estos números.

- De hecho, los dígitos de los números irracionales son tan "desorganizados" que parece como si estuvieran siendo *"guiados por el azar"*.

- Como las expansiones infinitas representan una limitación infranqueable, los números irracionales sólo pueden comprenderse si ellos poseen una propiedad que los define, como con los tres números célebres anteriormente mencionados.

- Los irracionales y los racionales conforman los números **reales**. Estos son la colección de *"puntos" incontables* que se representan en una línea recta: 

- Ahora con los números revisados, podemos repasar el concepto de la **dimensión**.
- Sabemos que *"un punto no tiene dimensión"*, que *"un segmento de línea recta es unidimensional"*, que *"el plano es bidimensional"*, y que vivimos en *"tres dimensiones"*.
- Sucede que existe una manera sencilla de verificar estos resultados, contando el número de *"cajas"* requeridas para cubrir un conjunto dado.
- Considere, por ejemplo, *intervalos* de un tamaño δ y pregúntese cuántos de ellos, $N(\delta)$, se requieren para cubrir un segmento de *línea recta* que mide *una unidad*.
- Si δ es igual a 1, entonces claramente un intervalo es suficiente, i.e., $N(1) = 1$. Si $\delta = 1/3$, entonces se requieren 3 intervalos para cubrir la línea de tamaño 1, i.e., $N(1/3) = 3$:



- Claramente, si $\delta = 1/n$, entonces $N(\delta) = n$, y esto da lugar a una relación sencilla entre δ y $N(\delta)$, es decir, $N(\delta) = \delta^{-1}$. Resulta que el inverso del exponente encontrado es precisamente la *dimensión* del segmento de línea recta, i.e., $D = 1$. (!)

- Las ideas funcionan también para un *punto*, pues independientemente de δ siempre se requiere **un** dicho intervalo para cubrirlo, i.e., $N(\delta) = \delta^0 = 1$, y entonces $D = 0$. (!)

- Para un plano o un volúmen los argumentos son similares, pero en vez de emplear intervalos es conveniente utilizar “cajas” cuadradas o cúbicas de *lado* δ para cubrirlos.

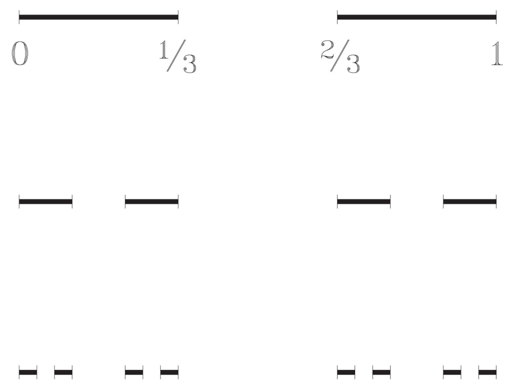
- Claramente, para el plano se obtiene $N(\delta) = \delta^{-2}$, pues el reducir el lado δ por un factor de dos aumenta el número de cuadrados en un factor de cuatro, 2^2, como puede observarse en pisos cubiertos con baldosas cuadradas.

- Igualmente sucede con un cubo, $D = 3$, pues el reducir el lado δ por un factor de dos aumenta $N(\delta)$ en un factor de ocho, 2^3.

- Estos objetos aquí nombrados son conjuntos *Euclideanos* prototípicos.

- Los **fractales** son objetos “fragmentados” cuyas *dimensiones fractales*, definidas contando cajitas, son típicamente no enteros que exceden sus dimensiones topológicas.

- Como un ejemplo, considere el *conjunto de Cantor*, definido como lo que queda de quitar *sucesivamente* “subintervalos abiertos de tamaño un tercio” de un intervalo de una unidad, como se muestra a continuación, y tal y como lo introdujo George Cantor en 1883.



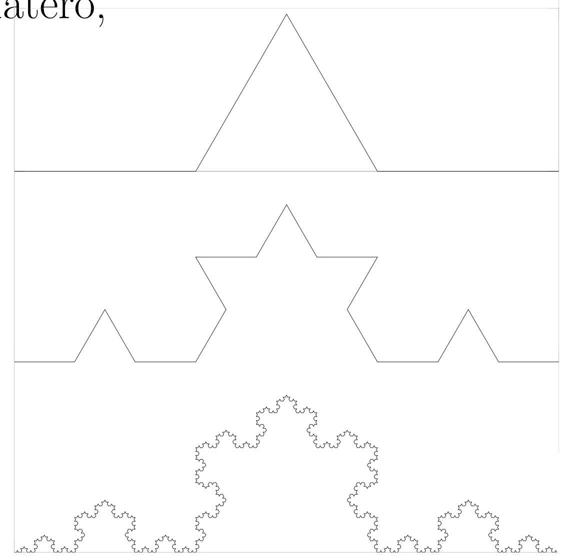
- Como puede discernirse, el conjunto de Cantor contiene una *infinidad* de puntos. Él claramente incluye las esquinas contables de todos los intervalos, pero resulta, al final, ser **no-contable** en tamaño, pues está definido por todos los números reales en $[0, 1]$ cuya *expansión ternaria*, en términos de 0's, 1's y 2's, no contiene ningún 1. (!)

- Desde un punto de vista topológico, este conjunto es "*polvo esparcido y vacío*", pero, como contiene muchísimos puntos, su dimensión es mayor que cero.

- El cálculo de dicha cantidad se puede hacer en paralelo con lo que se hizo con el segmento de línea recta, como sigue. Si se escoge un intervalo de tamaño 1, entonces él puede usarse para cubrir todo el conjunto de Cantor, i.e., $N(1) = 1$. Si δ se reduce a $1/3$, entonces $N(\delta) = 2$; y si $\delta = 1/9$, $N(\delta) = 4$, etcétera.

- Claramente, mientras δ decrece en potencias de tres, $N(\delta)$ aumenta en potencias de dos, $N(1/3^n) = 2^n$, y esto da lugar, después de un poco de álgebra, a $N(\delta) = \delta^{-D}$, donde el exponente está dado en términos de logaritmos, $D = ln2/ln3 \approx 0.63$. (!)
- El conjunto de Cantor es un **fractal** pues su dimensión de 0.63 excede su dimensión *topológica* de cero. Observe cómo la notación, tal y como la introdujo Benoit Mandelbrot en 1977, hace sentido, pues dicho polvo se obtiene a partir de un proceso de *fragmentación*. (!)
- Otros tipos de *polvos fractales* pueden ser construídos simplemente variando el tamaño del hueco en el intervalo.
- Por ejemplo, si en vez de remover los subintervalos del medio por terceras partes se quitan segmentos equidistantes de tamaño $h\%$, la dimensión es $D = ln2/(ln2 - ln(1 - h))$.
- Tal dimensión refleja la *cantidad de espacio cubierto* por el polvo, pues, dependiendo del tamaño de h, puede ser cualquier número entre 0 y 1.
- Claramente, cuando $h = 0$, el conjunto encontrado es, por construcción, el intervalo de 0 a 1, y él tiene dimensión 1. Si h aumenta hacia 1, el conjunto obtenido es cada vez más disperso y su dimensión disminuye hacia 0.

- Los fractales también se pueden construir en más dimensiones. Por ejemplo, la *curva de Koch*, introducida por Helge von Koch en 1904 y encontrada reemplazando cada segmento de línea por cuatro segmentos cuyo tamaño es la tercera parte del original y haciendo en la mitad un triángulo equilátero,



  es un conjunto fractal en el plano cuya dimensión fractal es $D = ln4/ln3 \approx 1.26$.

- Otros conjuntos similares parecidos a las *costas*, topológicamente unidimensionales y con dimensiones entre 1 y 2 (inclusive), pueden obtenerse variando la regla de la construcción.

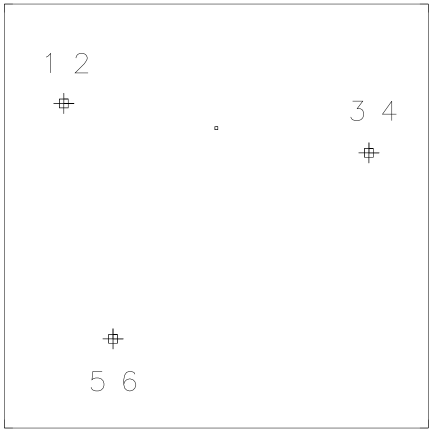
- Dichos conjuntos tienen *longitudes infinitas* y llenan el espacio en grados diversos en virtud a su *infinidad incontable*. (!)

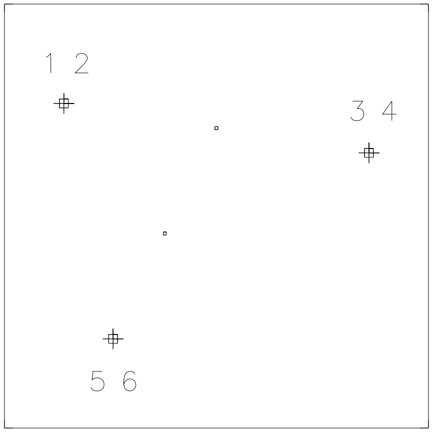
- Recientemente se ha encontrado que los conjuntos fractales también pueden hallarse "punto a punto", *iterando* reglas sencillas.

- El "*juego del caos*", introducido por Michael Barnsley en 1988, se ilustra a continuación.

- Empiece con tres puntos que forman un triángulo y numérelos de acuerdo a los lados de un dado. Pinte luego el punto medio de los vértices de arriba, como se muestra a la izquierda.

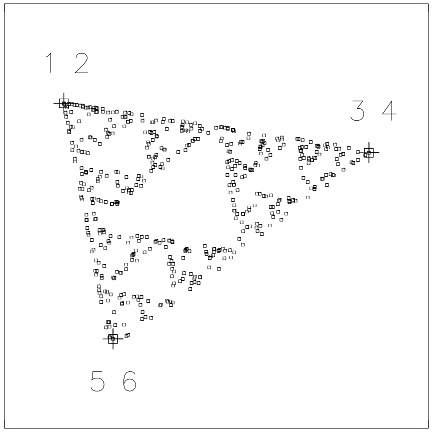
- Ahora lance el dado, y suponga que salió un 5. Entonces, pinte el punto en medio del punto inicial y el vértice correspondiente del triángulo, como se muestra a la derecha.

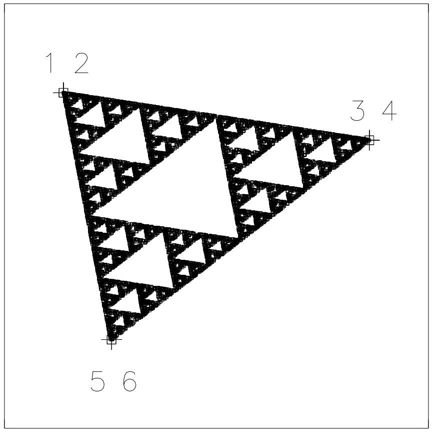




- Ahora, repita el proceso muchas veces, "*moviéndose hacia el punto medio*" de lo que salga al lanzar el dado.

- Lo que se obtiene luego de 500 y 8,000 veces se muestra debajo:





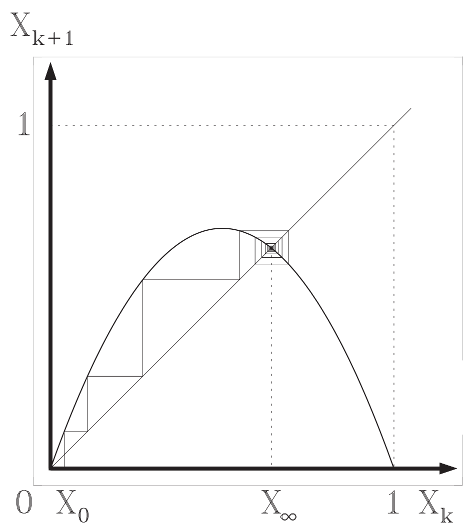
- El azar no tiene ningún efecto en lo que se obtiene, pues aparece el mismo conjunto *atrayente* independientemente del dado y del punto inicial, en virtud a un *teorema probabilístico*.
- El proceso genera el célebre *triángulo de Sierpinski*, introducido por Waclaw Sierpinski en 1916.
- Este "objeto vacío" tiene una estructura similar a la del polvo de Cantor, pues es lo que queda luego de quitar triángulos medios de un triángulo sólido, ad infinitum.
- Al eliminarse un triángulo de cuatro en cada generación, el triángulo de Sierpinski resulta tener una dimensión fractal $D = ln3/ln2 \approx 1.58$. (!)

- Aunque objetos de diversas apariencias pueden tener la misma dimensión fractal, las ideas fractales proveen un marco de referencia adecuado para estudiar la geometría compleja de la naturaleza, en una o más dimensiones.
- Pues tal y como lo expresó Benoit Mandelbrot de una forma elocuente, "las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza de los árboles no es lisa y tampoco los relámpagos viajan en línea recta". (!)
- Aunque la naturaleza no provee la repetición precisa de los ejemplos, i.e., su *auto-similaridad* ad infinitum, está bien establecido que los fractales son relevantes en muchas áreas de la ciencia que incluyen, entre otros, la física, la geofísica, la economía y la biología.
- Los fractales están en efecto por todos lados, pues la naturaleza comúnmente da lugar a *fragmentación* mediante la repetición de reglas sencillas. Así, el "cubrimiento" de muchos conjuntos naturales por "cajas" de diversos tamaños define simples **leyes de potencia** para un rango de escalas, i.e., $N(\delta) \sim \delta^{-D}$. (!)
- Los fractales también se han encontrado relacionados con sistemas dinámicos *no lineales*.
- Ellos incluyen el comportamiento complejo e impredecible conocido como el **caos**, tal y como lo reconoció por primera vez Edward Lorenz en 1963, mientras estudiaba el clima.

- Para ilustrar lo que es el caos, es pertinente estudiar la ecuación $X_{k+1} = \alpha X_k(1 - X_k)$, que denota la evolución de una población (normalizada) de una generación a la siguiente.

- Esta ecuación, conocida como la *curva logística* y con la forma de parábola, da lugar a diferentes comportamientos en función del *parámetro* α, un número entre 0 y 4.

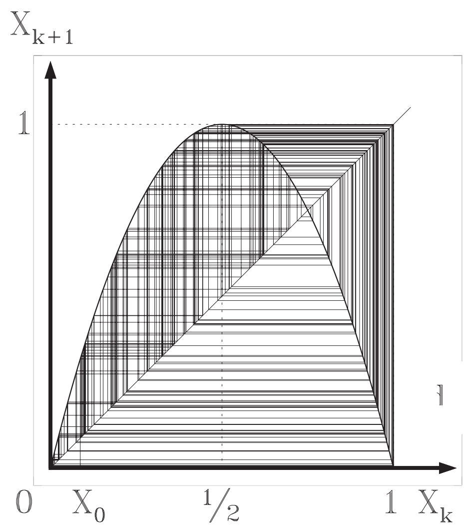
- Cuando $\alpha = 2.8$, la población descansa en X_∞, la intersección no nula de la línea a 45 grados y la parábola,



  independientemente del valor inicial de la población denotado por X_0.

- Este caso corresponde a una condición **ordenada** que puede visualizarse mediante la expansión de un número *racional* con un único valor *estable*. (!)

- Cuando $\alpha = 4$ la población no descansa, sino que vaga para siempre y sin repetirse en el polvo de un *conjunto atrayente fractal*,



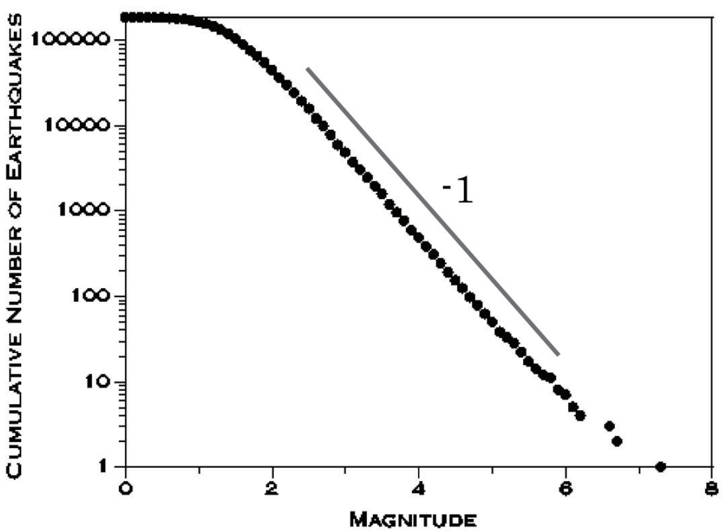
- Este caso es esencialmente *impredecible* y su estructura corresponde a la expansión de un número *irracional*. (!)

- Esta condición se conoce como **caótica**, pues un error pequeño en X_0 produce variaciones futuras considerables, e.g., mientras que un valor inicial de 0.4 resulta en 0.1 después de 7 generaciones, un valor inicial de 0.41 da lugar a 0.69. (!)

- La presencia de "*flujos deterministas no periódicos*" representó un descubrimiento importante en ciencia, pues éste estableció que la complejidad puede tener raíces sencillas.

- Un rasgo común de diversos fenómenos naturales complejos es la presencia de *leyes de potencia* en las distribuciones de frecuencia de sus eventos, $P[X \geq x] \sim x^{-c}$.

- Como con los fractales, estas *simples "líneas en log-log"* reflejan la ausencia de *escalas características* en diversos procesos como terremotos, avalanchas, incendios, etc. (!)

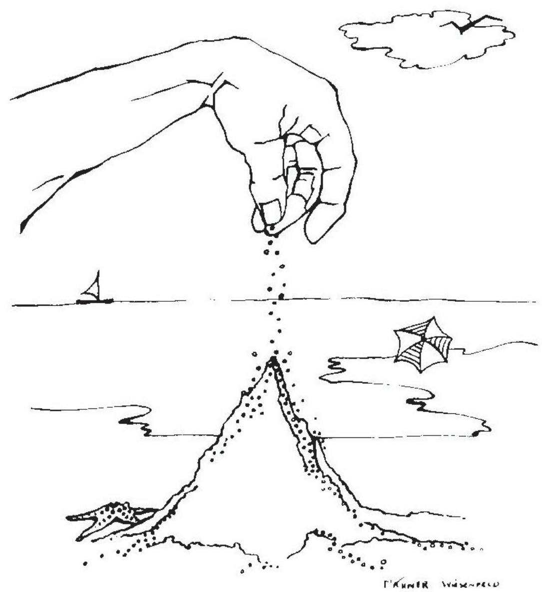


- Tales distribuciones poseen "*colas pesadas*" relativas a la distribución *normal* o *Gaussiana*, la armoniosa *campana* asociada con la *independencia*.

- Ellas se encuentran en la **complejidad generada por el hombre**, como en las *distribuciones sesgadas de riqueza* de las naciones y del mundo y también en la *distribución histórica de conflictos y guerras*. (!)

- Un concepto reciente que permite estudiar dichas *leyes de potencia* en diversos procesos naturales es el modelo *crítico auto-organizado*, tal y como lo introdujo Per Bak en 1996.

- La metáfora es que dichos sistemas, al *acumularse la energía*, se agrupan en un estado crítico siempre cercano a la desintegración, como lo ilustra una pila de arena en la playa. Aquí suceden *avalanchas* de diversos tamaños de acuerdo a leyes de potencia (de Bak, 1996). (!)



- Las ideas en esta introducción y su relación con el **amor** y la **paz** se desarrollarán aún más en lecciones subsiguientes.

Referencias:

1. P. Bak, *How Nature Works*, Copernicus, New York, 1996.
2. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988.
3. J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
4. J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*, Penguin Books, New York, 1987.
5. E. N. Lorenz, *The Essence of Chaos*, University of Washington Press, 1993.
6. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York, 1982.