LA HIPOTENUSA: EL CAMINO DE LA PAZ

Carlos E. Puente

Department of Land, Air and Water Resources

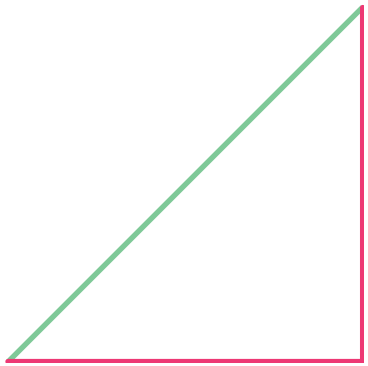
University of California, Davis

http://puente.lawr.ucdavis.edu

Resumen

- *Revisa el famoso teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos.*
- *Introduce cascadas multiplicativas sencillas que rompen el equilibrio en polvo fractal.*
- *Introduce las llamadas "escaleras del diablo" y sus propiedades universales.*
- *Explica cómo ocurre la turbulencia en el aire mediante una cascada genérica.*
- *Ilustra que dicho proceso siempre es de corta vida al ser disipativo.*
- *Muestra cómo las cascadas genéricas reflejan los sistemas políticos del mundo.*
- *Argumenta que es mejor evitar la "turbulencia" de cualquier cascada divisiva.*
- *Muestra cómo la paz está en efecto simbolizada por la recta hipotenusa.*

- Se muestra abajo un *triángulo rectángulo*, cuyos *catetos* miden cada uno una unidad:



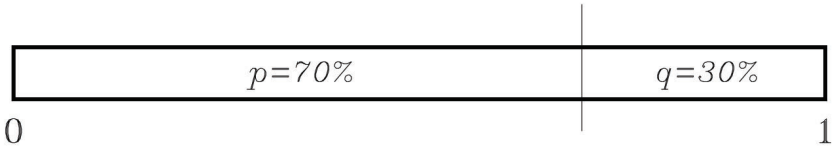
- En virtud al teorema de Pitágoras, el cuadrado de la *hipotenusa* es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir, dos.

- Como tal, la distancia más corta de *arriba* a *abajo* del triángulo tiene un valor igual a $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$.

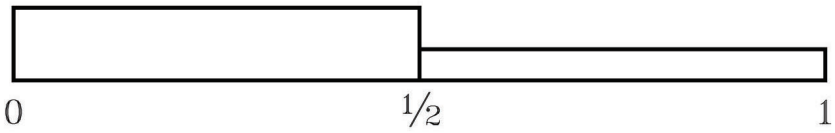
- Como lo veremos más adelante y a pesar de nuestra incapacidad de entender "punto, punto, punto" en dicho número irracional, la *raíz de dos* es un concepto simbólico muy poderoso.

- Para mostrar que tal es el caso y que la *línea recta* a 45 grados es el *camino de la paz*, es conveniente introducir primero un juego sencillo que los niños aprenden a jugar moldeando plastilina, como sigue.

- Comience con una barra *uniforme* de plastilina, tal y como sale de la caja, y córtela por su $p = 70\%$:



- Ahora, moldee los dos pedazos, *apilando* el de la izquierda y *alargando* el de la derecha, ambos hacia el *medio*, de modo que ellos conformen dos barras contiguas de igual longitud horizontal:

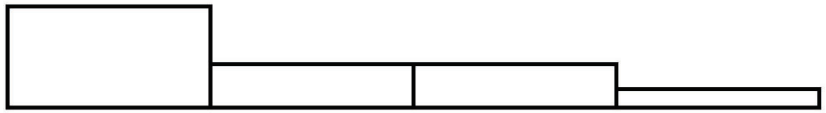


- La altura de la pieza de la izquierda es mayor que la altura original, y la altura de la pieza de la derecha es menor.

- Si la barra original tiene una altura de *una* unidad, el "rectángulo" de la izquierda tiene una altura de $2 \cdot p = 1.4$ *unidades verticales*, pues su área, i.e., la masa del pedazo, calculada multiplicando su base $1/2$ por su altura, es $p = 70\%$ del original.

- Igualmente, la altura del rectángulo de la derecha es $2 \cdot q = 0.6$ unidades verticales.

- Con el proceso plenamente entendido, repítalo en cada pedazo, empleando exactamente las mismas proporciones, para obtener cuatro piezas con tamaño horizontal 1/4:



- Las masas (áreas) de dichas piezas son respectivamente, 70% del 70%, 30% del 70%, 70% del 30%, y 30% del 30%, lo cual da, *multiplicando*, 49, 21, 21, y 9% de la masa total.

- Estos valores corresponden a la expansión familiar de $(p+q)^2$: p^2, dos veces $p \cdot q$ y q^2.

- Ahora el rectángulo más alto tiene una altura de $(2 \cdot p)^2 = 1.4^2 = 1.96$ unidades verticales.

- Claramente, si el proceso se repite un total de n niveles, el número de pedazos aumenta en *potencias de dos*: se obtienen 2^n rectángulos, todos con tamaño horizontal $1/2^n$, cuyas masas, que siempre suman 100%, corresponden a la expansión de $(p+q)^n$. (!)

- El proceso, conocido como una **cascada multiplicativa**, define $(n+1)$ alturas en los rectángulos ordenadas por *capas*: p^n, $p^{n-1} \cdot q$, $\cdots$, $p \cdot q^{n-1}$, y q^n. Hay un pedazo que contine p^n de la masa y uno con q^n, hay n rectángulos con $p^{n-1} \cdot q$ y $p \cdot q^{n-1}$, $n \cdot (n-1)/2$ pedazos con $p^{n-2} \cdot q^2$ y $p^2 \cdot q^{n-2}$, etc., de acuerdo al bien conocido *triángulo de Pascal*.

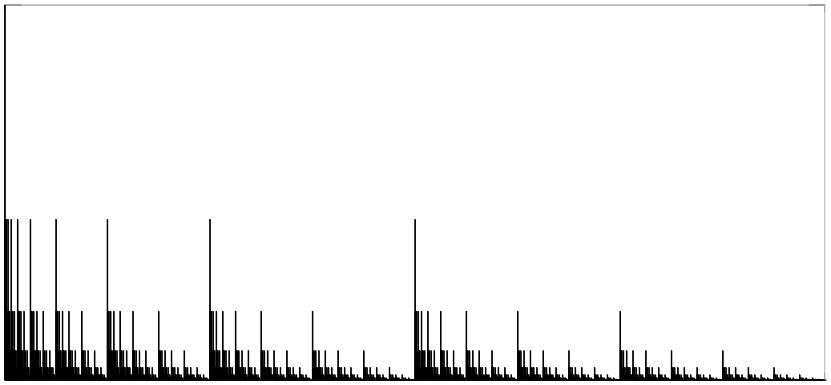
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

- El número de piezas en las capas $p^k \cdot q^{n-k}$ y $p^{n-k} \cdot q^k$ están dados por *coeficientes binomiales*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!},$$

donde $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ denota al *factorial* de k, y $0! = 1$.

- Cuando $n = 12$, se halla el siguiente conjunto de 4,096 rectángulos puntiagudos:

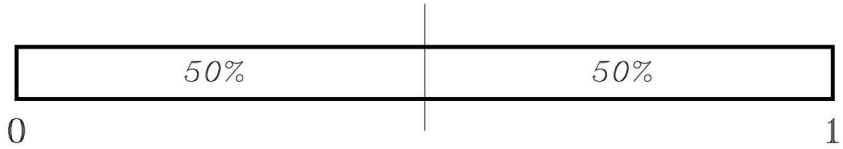


- Este conjunto no está dibujado a escala, pues tiene $1.4^{12} = 56.69$ unidades verticales. (!)

- Como puede apreciarse, el *sencillo* juego de niños destruye el **equilibrio** y lo convierte en *espinas* dispersas que exhiben una *estructura entrelazada* notoria. (!)

- Aunque la masa se *conserva*, el moverse de *espina* a *espina* es muy difícil, pues, al continuar el proceso, los rectángulos de igual altura *casi nunca son contiguos*.

- Para apreciar aún más la estructura *vacía* generada en cada capa por esta cascada, es conveniente introducir otro juego de niños.
- Este empieza como el anterior, con una barra *uniforme* de plastilina, pero esta vez se corta por la *mitad*:



- Ahora, las piezas se separan y se *apilan* a la izquierda y a la derecha, de modo que sus tamaños horizontales sean 1/3 y de forma tal que cada pedazo tenga el 50% de la masa:

- Los rectángulos, con un *vacío* entre ellos, tienen una altura común de 1.5 unidades verticales.
- Como antes, el juego continúa repitiendo el proceso en cada pedazo, cortando y separando en las mismas proporciones.
- Esto claramente da lugar a otra *cascada multiplicativa* divisiva que produce, después de n niveles de la construcción, 2^n rectángulos iguales y dispersos con masas $1/2^n$, tamaños horizontales $1/3^n$ y alturas *divergentes* $(3/2)^n$.

- Mientras el proceso se repite, el juego genera *púas* que no se tocan, *espinas* que crecen al *infinito* y que suceden sobre el *polvo de Cantor*. (!)

- En el límite, cada una de las infinitas espinas no contiene *nada*, pero entre todas ellas suman el 100%. Notablemente en este caso, y también para la primera cascada, $\infty \cdot 0 = 1$. (!)

- Variando el *tamaño del hueco* en el segundo juego se puede capturar la estructura *no-contigua*, *vacía* y *fractal* presente en todas las *capas* generadas por la primera cascada.

- Mientras que las capas menos densas, hacia la periferia del triángulo de Pascal, corresponden a huecos más grandes, las capas más densas requieren de huecos de menor tamaño.

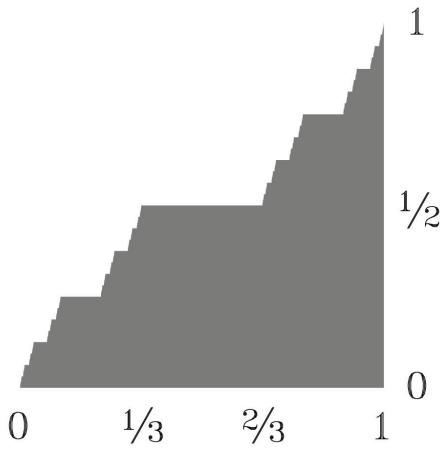
- Dada la multitud de *polvos* que descomponen el dominio del objeto espinoso del primer juego por *capas*, dicho conjunto se conoce en la literatura como un **multi-fractal**.

- Mientras que la segunda cascada divide el equilibrio en un conjunto infinito de púas iguales sobre el *polvo*, el primero genera *"multi-púas"* sobre *"multi-polvo"*. Como tal, los dos juegos **divisivos** están íntimamente ligados el uno al otro.

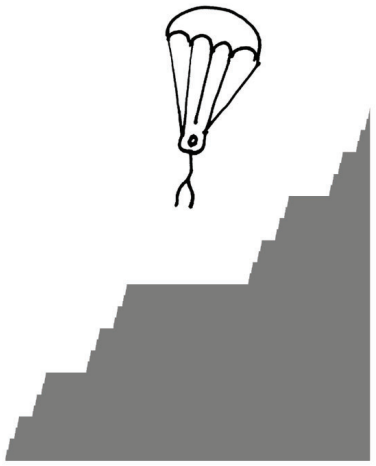
- Para apreciar aún más los objetos generados por los juegos y como las púas crecen sin límite, es conveniente mostrar sus *masas acumuladas*, desde el comienzo hasta un punto x:

- Para la cascada con huecos, la *riqueza* hasta el punto x, $W(x)$, da: $W(0) = 0$, $W(1) = 1$, $W(1/3) = 1/2$, $W(2/3) = 1/2$, y también para cualquier valor de x en el hueco más grande, $W(1/9) = 1/4$, $W(2/9) = 1/4$, etcétera.

- Al final, $W(x)$ vs. x contiene *mesetas* en cada sitio en que el objeto original tiene *huecos*:



- Sucede que dicho objeto es muy peculiar, pues si nos lanzáramos a él en paracaídas, al llegar nos parecería que es *plano*.



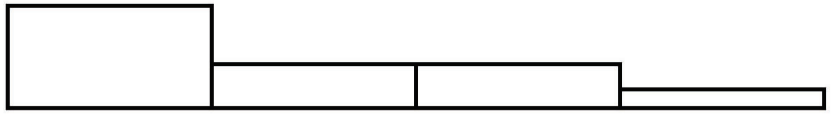
- Si nuestra "escala" es suficientemente pequeña, llegaríamos a una meseta con toda probabilidad y creeríamos falsamente que hemos arribado al *equilibrio*.

- En virtud a dicho *engaño* y dada la naturaleza *divisiva* de la cascada, dicha frontera, *continua* y *sin derivadas* en muchísimas partes, fue bautizada de una forma adecuada por George Cantor en 1883 como la **escalera del diablo**. (!)

- Como la escalera contiene solamente líneas horizontales o verticales (las líneas inclinadas son sólo una ilusión), la longitud de arriba a abajo, siguiendo dicha curva "*dentada*", es de **2 unidades**: una unidad horizontal por todos los huecos más una unidad vertical, pues la cascada conserva la masa.

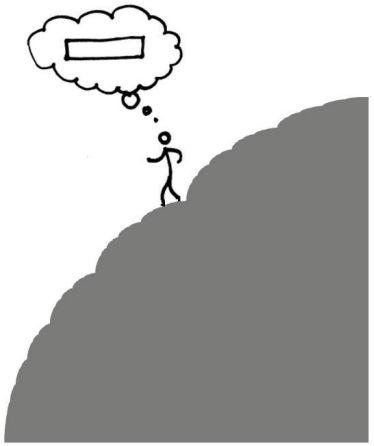
- Esta propiedad es **universal**. La segunda cascada, para todo *hueco* inicial, h, da una función de riqueza que es una *escalera del diablo* con longitud *máxima* de 2 unidades. (!)

- Para la primera cascada, la riqueza acumulada se puede calcular fácilmente siguiendo la dinámica del juego.



- Por ejemplo, al segundo nivel: $W(1/4) = 0.49$, $W(1/2) = 0.7$, $W(3/4) = 0.91$, etcétera.

- Esto da lugar a otra *escalera del diablo* con la forma de una *"nube de polvo"*:

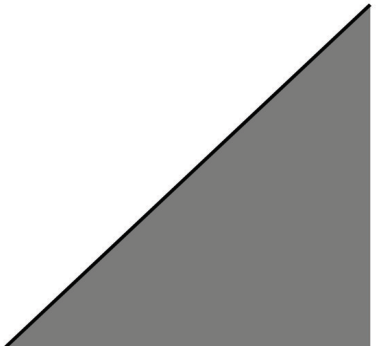


i.e., otra frontera de *longitud máxima*, al ser localmente plana en todas partes. (!)

- Esta propiedad es también **universal** para el primer juego, pues siempre resulta una frontera *continua* y dentada con muescas horizontales-verticales y, por tanto, *sin derivadas en ninguna parte*. Si hay un *desequilibrio* $p \neq 1/2$, no importa cuán pequeño, el juego produce *espinas* sobre *polvo* y escaleras de riqueza que siempre miden **2 unidades**. (!)

- Existe un escape, sin embargo. Cuando el primer juego se juega por *la mitad*, i.e., por $p = 1/2$, y el segundo se hace *sin huecos*, i.e. $h = 0$, entonces el *balance* de la barra original siempre se mantiene:

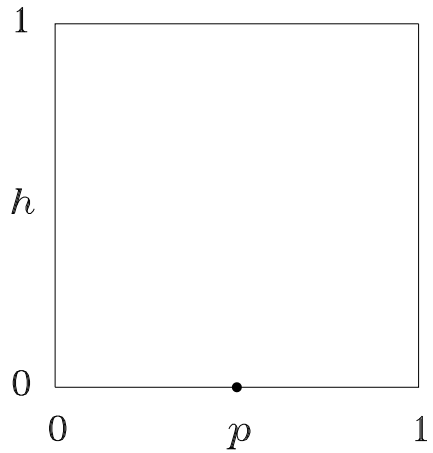
- En este caso, la frontera de riqueza simplemente da una rampa *recta* que tiene distancia **mínima** de arriba a abajo:



- Mientras que el mantener el **equilibrio** resulta en una función de riqueza que viaja por la **hipotenusa**, los juegos divisivos dan escaleras dentadas que son tan largas como los **catetos** del triángulo rectángulo mostrado. (!)

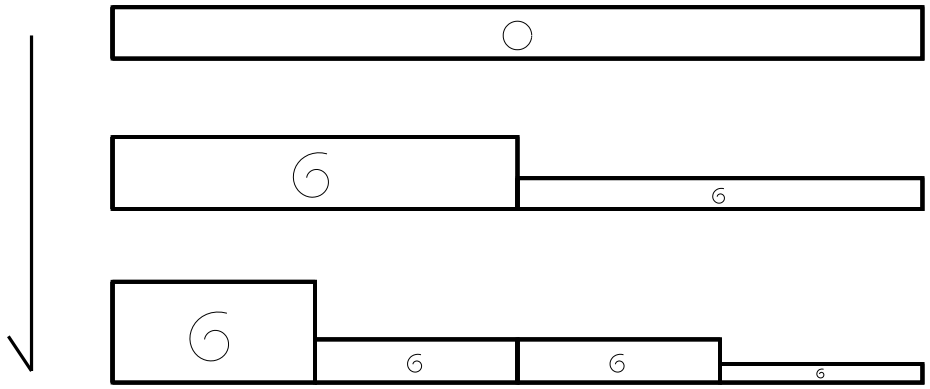
- Cuando los dos juegos divisivos se combinan para producir cascadas adicionales que contienen *desequilibrios* p y *huecos* h, se producen otros conjuntos exóticos de *espinas* sobre *polvo* que definen otras *escaleras del diablo*.

- Como se muestra abajo, existe solamente **un punto**, en un cuadrado de posibilidades, que da lugar a la distancia mínima de $\sqrt{2}$:



- Pero el asunto es aún más dramático, pues la barra se puede partir en más de dos pedazos y las cascadas pueden jugarse con la ayuda del *azar*, i.e., empleando en el proceso desequilibrios y huecos variables, y dichos mecanismos generales también resultan en *espinas* sobre *polvo* y en *escaleras del diablo*. (!)

- Sucede que avances tecnológicos recientes han permitido identificar el rompimiento progresivo dado por la primera cascada en la forma en que la *turbulencia* ocurre en el *aire*.



- Cuando la *inercia* del aire excede la *cohesión* interna del fluido, i.e., cuando su *número de Reynolds* $\mathcal{R} = v \cdot L/\nu$ es grande, el aire fluye de una forma *irregular* e *intermitente*.

- Tal y como sucede con otros fluidos, cuando la *viscocidad* del aire ν es subyugada por excesiva energía, medida ésta por el producto de la velocidad v y una escala característica L, el fluido no puede continuar moviendose como un *todo* y de una manera *laminar* y *calmada*, sino que se parte en *remolinos* que *rotan hacia adentro*.

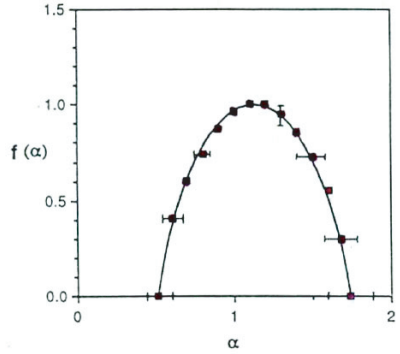
- Se forma una *cascada*, como la introdujo inicialmente Lewis Fry Richardson en 1922, y los elementos *espirales* llevan por sí mismos distintas cantidades de *energía* de sitio a sitio.

- Al continuar el proceso, las energías se ordenan en erupciones *intermitentes* y *violentas* que eventualmente se *disipan* en la forma de *calor*, una vez los remolinos se vuelven pequeños.

- Lo que se observa en experimentos a lo largo de una dimensión son *capas entrelazadas de energías* las cuales son *universalmente* consistentes con la primera *cascada*, cuando los remolinos hijos llevan *precisamente* el 70 y 30% de la energía de sus padres. (!)

- Notablemente y como lo reportaron Charles Meneveau y Katepalli Sreenivasan en 1987, la naturaleza produce una **permutación** de la cascada, con los remolinos más energéticos sucediendo no siempre a la izquierda sino a ambos lados, como guiados por el azar.

- Para turbulencia definida sobre: una malla, en la estela de un cilindro, en la capa límite, y en la atmósfera se obtiene:



un ajuste excelente, con los cuadrados y las barras asociados con medias y desviaciones de los datos y con la parábola invertida corrrespondiendo al simple juego con $p = 0.7$. (!)

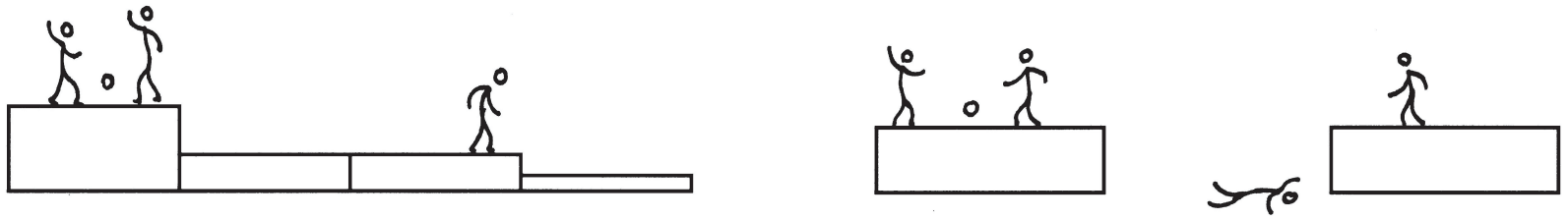
- Un día, al ponderar estos simples resultados, válidos desde Afganistán hasta Zimbabwe, se me ocurrió que las cascadas también podían ser usadas para describir, al menos de una manera figurativa, las formas en que nosotros los humanos creamos nuestra "*turbulencia*".

- Después de todo, las *"fuerzas inerciales"* muchas veces rompen nuestra *"cohesión"* y, cuando esto sucede, se suscitan *"intermitencias"* que dan lugar al dolor de la **violencia**.

- Como nuestra aflicción (y ciertamente la mía) muchas veces está asociada con la repetición incesante de un rasgo *divisivo*, también me pareció razonable el emplear las dos cascadas generales para simbolizar los caminos que nos llevan (me llevan) a *"morder el polvo"*. (!)

- Dada la *universalidad* de las nociones y la *"auto-similaridad"* de nuestra división, creo que las ideas son útiles para entender nuestra *aflicción* en una variedad de escalas: dentro de nosotros mismos, en nuestras relaciones, en nuestras sociedades, y en el mundo en general.

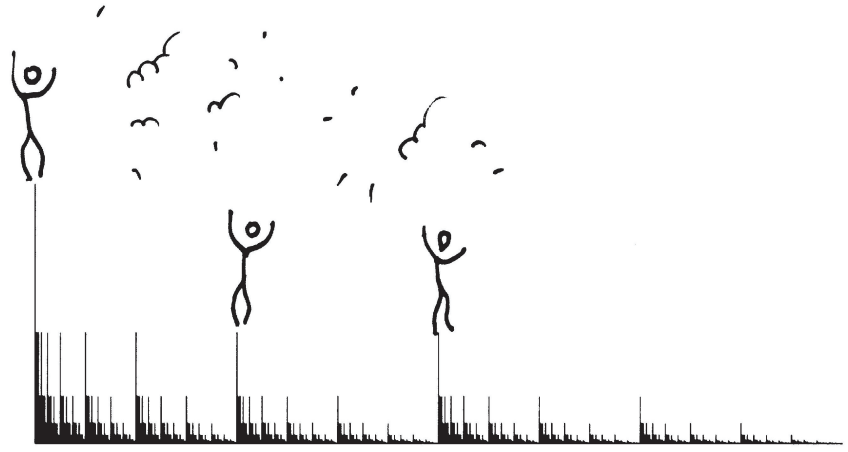
- Las dos cascadas son, creo yo, metáforas certeras que permiten contemplar las formas comunes que usamos para propagar división: **desigualdades** y **discriminaciones**: (!)



- Y tales nociones pueden ser usadas, creo que de una manera transparente, para descubrir las falacias inherentes en los sistemas políticos que han gobernado nuestra humanidad.

- Pues es claro, basado en la historia reciente y en el sentido común, que la "*igualdad a la fuerza*" no funciona, pues el *miedo* implícito de "terminar en un hueco" **disipa** el tapiz de la *amistad* y el *amor* que verdaderamente pueden sostener a una sociedad.

- Pues aunque el sistema basado en el falso dogma de la "*supervivencia del más fuerte*" parece haber ganado la batalla,



éste también produce *espinas* y *polvo* que destruyen la amistad en su implacable y falsa búsqueda de llegar a ser "*el número uno*".

- Las ideas resultan tener una validez inesperada más allá de lo metafórico, pues el objeto *multi-fractal* generado por la primera cascada, para $n = 20$ y $p = 0.7$ (como en la naturaleza), ajusta muy de cerca la distribución de la riqueza en el país más poderoso del mundo. (!)

- De hecho, cálculos sencillos con el triángulo de Pascal revelan un ajuste de la riqueza de los 5, 10, 20, y 40% más ricos en los **Estados Unidos** en 1998, esto es, 59 (57), 71 (70), 84 (84), y 95% (95) de los recursos, con los valores de la cascada dados entre paréntesis.

- Aunque la riqueza del 1% más rico es subestimada por la simple cascada, 38% (30), estos resultados nos permiten visualizar las funestas consecuencias de propagar una **mentira** y proveen un llamado conmovedor a la **conversión**, para evitar así la *disipación* prescrita tanto por las leyes de la física como por el sentido común. (!)

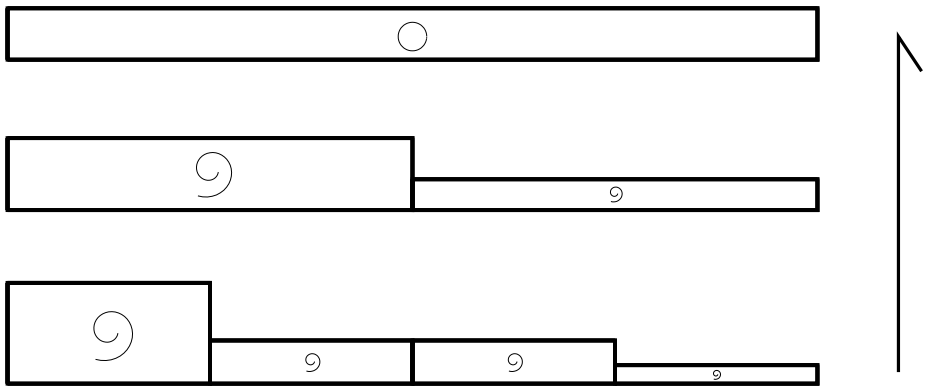
- Pues la bondad de "amar el uno al otro" contradice la realidad de "competir el uno con el otro" y porque lo último produce *miseria* y *soledad*, aún a aquellos "a la cabeza".

- Como las nociones de las cascadas son en efecto *universales*, con ellas podemos ajustar (usando el azar si se requiere) las distribuciones de riqueza con "colas pesadas" de cualquier nación, y también la distribución total de la riqueza en el mundo, una que tristemente incluye a 2/3 de la población viviendo bajo extrema pobreza. (!)

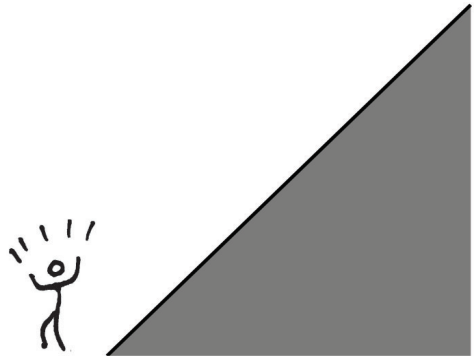
- Con las cascadas se puede reconocer un patrón común a tales *leyes de potencia*, también conocidas como *distribuciones de Pareto* luego que Vilfredo Pareto notara su ubicuidad en 1906: todas ellas reflejan *escaleras del diablo* que viajan distancias máximas.

- Pues aún si algunos expertos, que miden el bienestar de los seres humanos por medio de números finitos, nos dicen que una distribución divisiva es mejor que otra y que la *globalización* traerá *paz* y *justicia* a todos, las nociones de las *cascadas* nos recuerdan nuestra triste historia de *maldad* y *codicia* y nos muestran **el punto** de *verdadero equilibrio* en donde podemos realmente satisfacer nuestra esencia. (!)

- Pues la división puede ser vencida, si nosotros, humanos con *alma*, escuchamos la voz y aprendemos de la naturaleza para voltear la cascada y así sanar nuestro mundo "fractal":



- Pues, si prestamos atención, podemos fielmente caer en paracaídas en la *unitiva* **hipotenusa**, $X = Y$, y emplear su *sabiduría simple y radical* para evitar todas las *espinas* y el *polvo.*



- Pues hablando figurativamente pero también con certidumbre, no existe otra manera de resolver nuestros problemas sino llegando al "**origen**" mismo de las cosas. (!)
- Al final, creo que podemos aprender bastante de las simples cascadas, lecciones relevantes que seguramente aplican a cada uno de nosotros.
- Para mí, los *símbolos universales* en esta lección nos recuerdan nuestras **opciones**:
- Podemos seleccionar *equilibrio* o *turbulencia*, *calma* o *violencia*, *rectitud* y **paz** o la *perversidad* que proviene de decidir, aún si lo hacemos inadvertidamente, el vivir con *ansiedad* a altos números de Reynolds. (!)

- Las imagenes reafirman la bondad del "*cincuenta-cincuenta*" proverbial como esencial para la *amistad*, pues su camino *más corto* y *recto* es mucho mejor que cualquier forma de *desequilibrios* y *huecos* que nos llevan, políticamente o no, a separaciones *más largas*. (!)
- Pues las parejas casadas encuentran su *felicidad* cuando ellas hallan su *raíz* común. (!)
- Estas ideas sencillas nos recuerdan que podemos escoger el cambiar el proceso **natural** para *reconciliarnos* con el otro, i.e., *la integración* y su bello símbolo $\int$ (la ese alargada), en vez de continuar creyendo en la *separación* y la *división* y su símbolo \$, una clara "*viga negativa*" que nos impide reconocernos como hermanos y hermanas. (!)
- Pues ciertamente podemos escoger lo *completo* sobre lo *vacío*, la *unidad* sobre lo *roto* (*polvo fractal*), y, de una forma vívida, una secuencia infinita de elementos espirales *hacia afuera* que denotan nuestra **unidad** y **amor**, $1 = 0.999\cdots$, en vez de una "**fracción diabólica**", $2/3 = 0.666\cdots$, que puede ser leída de la cascada natural divisiva y que adecuadamente simboliza la *tontería* y el *vacío* de nuestro **orgullo**. (!)
- Pues como se puede observar en un reloj, el espiral *positivo* de la unidad, $r = e^{+\theta}$, siempre mira hacia el *futuro* con misericordia, mientras que el divisivo y *negativo*, $r = e^{-\theta}$, está siempre arraigado en el *pasado* buscando la venganza. (!)

- Para concluir, estas son algunas de las opciones que pueden extraerse a partir de esta lección:

Equilibrio	*Turbulencia*
Calma	*Violencia*
Rectitud	*Perversidad*
"50-50"	*Inequidad*
Más corto	*Más largo*
Reconciliación	*Separación*
Integración, $\int$	*División, \$*
Completez	*Vacío*
Unidad	*Polvo*
$1 = 0.999\cdots$	$2/3 = 0.666\cdots$
Positivo, +	*Negativo, -*
Futuro	*Pasado*

- La siguiente canción resume esta lección.

LA HIPOTENUSA

¿Te acuerdas,
cuando estabas en la escuela?
¿Te acuerdas,
aprendiendo de veras?

¿Te acuerdas,
pintando todo el día?
¿Te acuerdas,
jugando geometría?

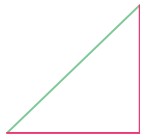
¿Te acuerdas,
de los ángulos rectos?
¿Te acuerdas,
de los tales catetos?

¿Te acuerdas,
de hipotenusa y su distancia?
¿Te acuerdas,
del teorema de tu infancia? *Pitágoras!*

Ahora vamos a explorar
para que más sirve eso,
ahora vamos a estudiar
su relación con lo nuestro.

Ahora vamos a explorar
para que más sirve eso,
ahora vamos a estudiar
su relación con lo cierto.

Hay dos caminos
ve, no es invento,
el uno es mentira
y el otro es recto.



Camino largo
o viaje derecho,
exigiendo en vano
o dando alimento.

Conciencia ligera
o corazón pesado,
la vida plena
o tiempo gastado.

Yendo por el medio
o por los catetos,
hallando la raíz
o perdiendo el centro. $\sqrt{2}$

Mira, esto es sólo verdad,
mira, la vida cómo va. (2)

Aunque lo dudemos,
no hay más opción,
y aunque nos parezca exageración:
o usamos la hipotenusa
o vamos por los catetos. (2)

Mira que es cierto...

$1 = 0.999\ldots$

Si tu corazón no miente
y comprendes que hay hermano,
si tú haces lo que es bueno
y al que sea das la mano:
usas la hipotenusa.

Y si me pongo iracundo
y mi ego incita al tajo,
si acumulo los rencores
sin perdonar desde abajo:
voy por catetos.

Si el amor guía tu día
en lo humilde de la entrega,
si construyes la alegría
en constante vida nueva:
usas la hipotenusa.

Y si me hago el bobo
con hipócrita conciencia,
y si lo ajeno es excusa
para crecer mi indiferencia:
voy por catetos.

$2/3 = 0.666\ldots$

¿No es cierto?

Entonces, corolario. Coro, ¿qué?

Aprende el coro...

$X = Y$

Ay por catetos no,
ay por catetos no,
ay Dios, usa la hipotenusa.

Ay por catetos no,
ay por catetos no,
no no no, usa la hipotenusa.

Para vivir en paz
para sembrar unión,
ay Dios, usa la hipotenusa.

$\int$

Para sanar dolor
para gestar amor,
ay Dios, usa la hipotenusa.

Para reir al fin
para entender mejor,
ay Dios, usa la hipotenusa.

Para crecer la fe
para soñar el sol,
ay Dios, usa la hipotenusa.

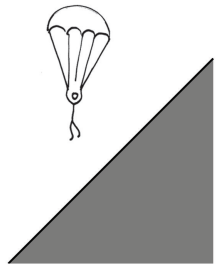
No olvidemos...

Ay por catetos no,
ay por catetos no,
ay Dios, usa la hipotenusa.

Oye amigo...

Ay por catetos no,
ay por catetos no,
no no no, usa la hipotenusa.

Al Origen...



Referencias:

1. J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
2. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York, 1982.
3. C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, "Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence," *Phys. Rev. Lett.* 59:1424, 1987.
4. C. E. Puente, *The Hypotenuse. An illustrated scientific parable for turbulent times*, 2005.

4. K. R. Sreenivasan, "Fractals and multifractals in fluid turbulence," *Ann. Rev. Fluid Mech.* 23:539, 1991.