

C O M
P L E
X U S

Revista de Complejidad, Ciencia y Estética

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD. UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

Carlos E. Puente

Department of Land, Air and Water Resources
University of California, Davis
Davis, CA 95616, Estados Unidos
cepuente@ucdavis.edu

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD. UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

Carlos E. Puente

Department of Land, Air and Water Resources
University of California, Davis
Davis, CA 95616, Estados Unidos
cepunte@ucdavis.edu

Resumen

Las últimas décadas han sido testigo del desarrollo de una colección de ideas encaminadas a entender y predecir la ubicua complejidad de la naturaleza. Este artículo explica cómo dicho trabajo provee, a partir de su estudio detallado del orden y el desorden, un marco de referencia imparcial que permite visualizar la dinámica y las consecuencias de los rasgos divisivos que siempre han estado presentes en la humanidad. Específicamente, este trabajo muestra cómo resultados recientes y universales, acerca de la transición del orden al caos mediante una cascada de bifurcaciones, proveen una invitación parabólica y antigua a un estado sereno, simbolizado por la convergencia al origen en la raíz del árbol caótico de Feigenbaum, en el cual podemos lograr la paz que deseamos. Se explica cómo dicha convergencia se torna urgente dada la conexión de dicho árbol moderno con otras higueras antiguas igualmente simbólicas.

Palabras clave: *caos, complejidad, lecciones, parábolas, paz*

1. Introducción

Desde tiempo inmemorial, el estado de confusión que denominamos ‘caos’ ha estado presente en la historia de la humanidad. Hoy por hoy, diversas manifestaciones de tal estado desordenado y aleatorio continúan latentes en guerras y rumores de guerras, holocaustos, epidemias y pandemias, terrorismo, corrupción, hambrunas, caídas de las bolsas de valores, uso de drogas y pobreza extrema: su presencia claramente rasga el tapiz de la unidad e impide el florecimiento de una paz genuina en el mundo.¹

En las últimas décadas se ha descubierto diversas rutas del orden hacia el caos, y entre ellas ocupa un lugar de prominencia la definida mediante una cascada de bifurcaciones.²⁻⁴ Dicha ruta es particularmente célebre por la sencillez inherente de las ideas y por la aplicabilidad de las nociones en una variedad de disciplinas que abarcan la ecología, la ingeniería, la química y la física. Tal y como se repasa en este artículo, diversas cascadas de bifurcaciones dan lugar a diagramas exóticos, con propiedades universales y con forma de árbol, que expresan la transición coherente del ‘orden’ al ‘desorden’ y que permiten comprender la dinámica elusiva del calentamiento de un fluido (es decir, convección) desde su estado pacífico de quietud hasta una condición turbulenta y caótica cuando el calor agregado al fluido es excesivo.

Este artículo explora las propiedades universales de los árboles caóticos y en particular del árbol icónico definido a partir de la parábola logística y en honor a Mitchell Feigenbaum, es decir, el árbol de Feigenbaum o, traducido del alemán, el árbol de la higuera, para mostrar, por analogía y tal y como se hizo antes a partir de cascadas multiplicativas y la turbulencia natural,⁵ que en efecto existe un único estado, en la raíz de dichos árboles, en donde nosotros como seres humanos podemos hallar la paz que anhelamos.

La organización de este trabajo es como sigue:

Primero se repasa la dinámica de la parábola logística. Luego, se introduce el árbol de Feigenbaum conjuntamente con algunas de sus propiedades universales más importantes. Después se muestra cómo las ideas son relevantes para modelar la convección. Luego, se explica cómo la teoría del caos provee una parábola certera y antigua hacia la paz en la raíz de dicho árbol. Y finalmente, se resume el trabajo por medio de una poesía-canción.

2. La Dinámica de la Parábola Logística

La ecuación prototípica empleada para explicar el caos es aquella que define la parábola logística, $X_{k+1} = \alpha X_k (1 - X_k)$. Aquí, X_k denota el tamaño (normalizado entre 0 y 1) de una población (digamos, conejos) en la generación k , α es un parámetro que varía entre 0 y 4 incluidos, y la expresión dicta lo que ocurre de una generación a la siguiente.

En la Figura 1 se observa la evolución de una población regida por dicha expresión cuando α es igual a 2.8. Como se observa, de un valor inicial pequeño X_0 , y siguiendo sucesivamente las líneas verticales y horizontales hasta la recta $X = Y$, se llega, en este caso, a un único punto fijo X_∞ , que corresponde a la intersección no nula entre la recta y la parábola.

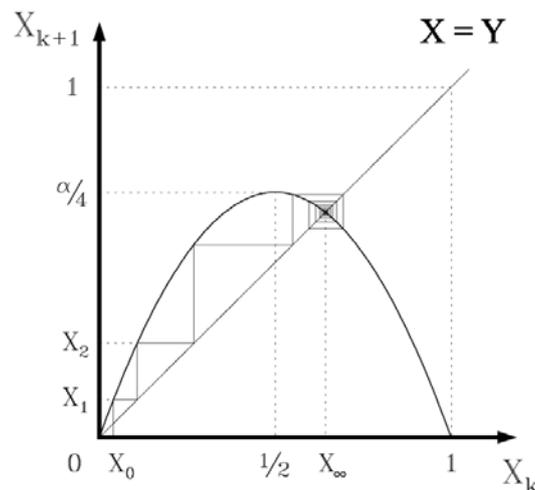


Figura 1. La parábola logística y la convergencia a un punto fijo.

Tal y como es bien conocido, X_∞ depende exquisitamente de α . A continuación se repasan los diversos estados que define la simple ecuación cuadrática cuando el pico de la parábola aumenta progresivamente.

Cuando la parábola está debajo de la recta, es decir, cuando $\alpha \leq 1$ como en la Figura 2, X_∞ converge a cero, y esto sucede pues la pendiente de la parábola en el origen al ser menor que la de la recta atrae cualquier población. Cuando la parábola pasa el umbral uno a uno $X = Y$, como en la Figura 1, la pendiente

de la parábola en el origen es mayor que uno, y entonces la dinámica ya no llega a cero, pues el origen repele. Si α está entre 1 y 3, la reiteración de la ecuación logística converge a la intersección no nula entre la parábola y la recta dada por $X_\infty = (\alpha - 1)/\alpha$, como en la Figura 1.

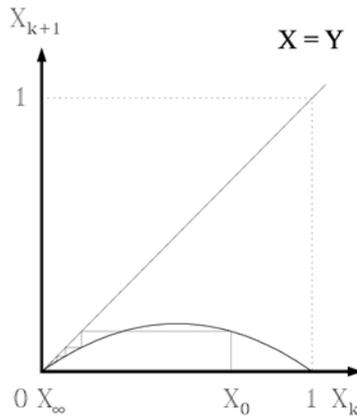


Figura 2. Convergencia al origen

Si α aumenta más allá de 3, lo que le ocurrió al origen también le sucede a la intersección no nula entre la recta y la parábola, y dicho comportamiento repele. Ahora la dinámica genera oscilaciones estables, primero de dos en dos hasta otro umbral, luego de cuatro en cuatro hasta otro umbral mayor y así sucesivamente, en una cadena de bifurcaciones, tal y como se ilustra en la Figura 3 para valores de α de 3.2 y 3.46 respectivamente.

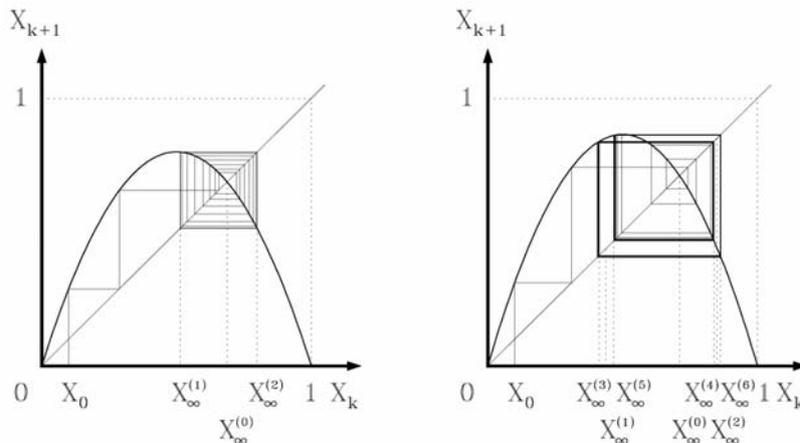


Figura 3. Convergencia a ciclos repetidos cada 2 y cada 4 generaciones

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.
 UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

Un número infinito de bifurcaciones ocurre, en potencias de 2, al aumentar α , y se traspasa una infinidad de umbrales hasta un valor $\alpha_{\infty} = 3.5699\dots$. Allí la dinámica está atraída por un conjunto infinito y carente de cohesión (es decir, como el polvo cantoriano) llamado ‘el atrayente de Feigenbaum’, cuyo histograma, mostrado en la Figura 4, tiene una estructura multifractal ‘espinosa’, similar a la encontrada al combinar cascadas multiplicativas clásicas, tal y como se emplea para modelar la turbulencia atmosférica.⁵

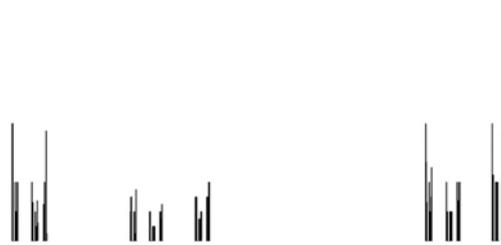


Figura 4. Histograma espinoso del atrayente infinito hallado cuando $\alpha = \alpha_{\infty}$.

Quando α excede α_{∞} , se encuentran a veces oscilaciones estables como en la Figura 5, para valores de α iguales a 3.74 y 3.83, pero más comúnmente comportamientos infinitos no repetitivos y sujetos a variaciones extremas a condiciones iniciales como en la Figura 6, para valores de α de 3.6 y 4.

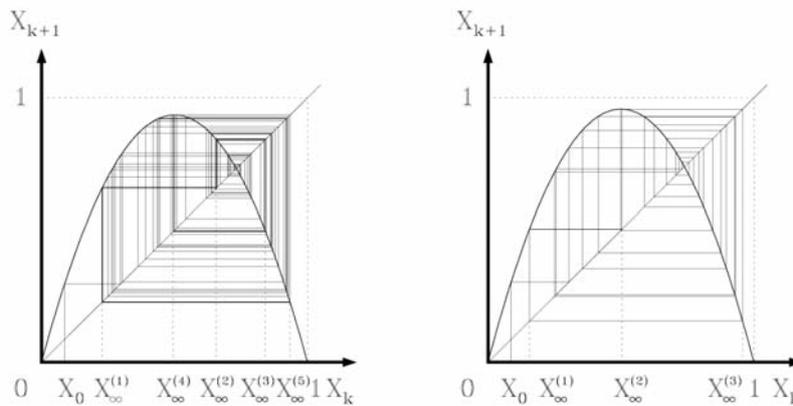


Figura 5. Convergencia a ciclos repetidos cada 5 y cada 3 generaciones

Resulta ser cierto que existen valores de α mayores que α_∞ para los cuales la población se repite exactamente cada n generaciones para cualquier número n que no es una potencia de 2. Pero, entretrejida en esta increíble repetitividad arbitraria, existen muchísimos valores del parámetro α para los cuales la población no se repite, sino que vaga para siempre en un atrayente extraño infinito conformado por puntos que no se tocan y que definen el bien denominado comportamiento ‘caótico’

Los casos infinitos y a la vez estables también están caracterizados por su sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, pues el empezar la dinámica caótica en dos poblaciones arbitrariamente cercanas da lugar a divergencias exponenciales, aunque deterministas, dentro del mismo atrayente extraño. Éste es el imperdonable y famoso efecto mariposa que explica cómo un pequeño error, no importa cuán pequeño, impide el que podamos predecir con exactitud la evolución de una población caótica.

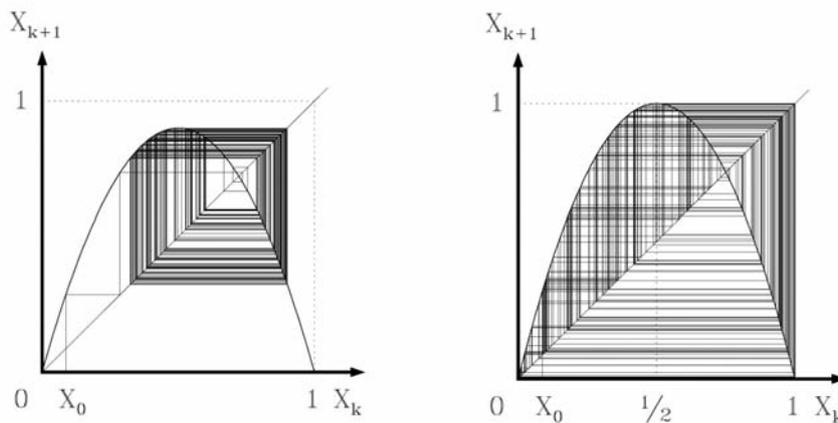


Figura 6. Convergencia a atrayentes extraños no repetitivos

3. El Árbol de Feigenbaum

La Figura 7 resume el increíble comportamiento de la sencilla parábola logística. Éste es el famoso diagrama de las bifurcaciones, o el árbol de Feigenbaum, si se rota 90 grados

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.
 UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

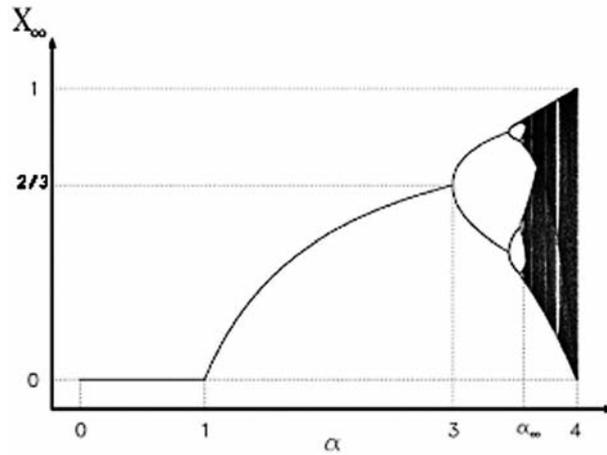


Figura 7. El árbol de bifurcaciones para la parábola logística.

El variar α tiene profundas implicaciones y da lugar a una raíz recta, una rama ‘tierna’, ramas de bifurcaciones, y de una manera entrelazada, ramas periódicas junto al follaje no-repetitivo y, por ende no cohesivo y polvoriento del caos.

Tal y como puede apreciarse mejor en la Figura 8, en el árbol caótico de la higuera es eso lo que quiere decir Feigenbaum en alemán tal y como se afirmó anteriormente; en efecto, contiene oscilaciones que terminan abarcando, en una infinidad de franjas blancas y en las potencias de 2 previas, todos los números.

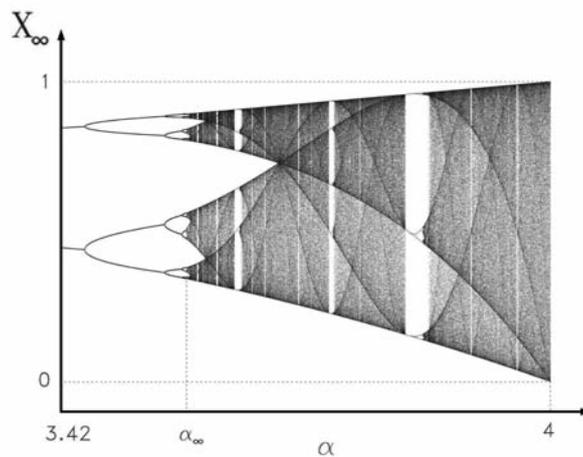


Figura 8. La cola del diagrama de bifurcaciones para la parábola logística.

Esto se puede apreciar aún más magnificando el brote del medio en la Figura 8 correspondiente al período 3, el cual produce una copia reducida de todo el diagrama, como se muestra en la Figura 9.

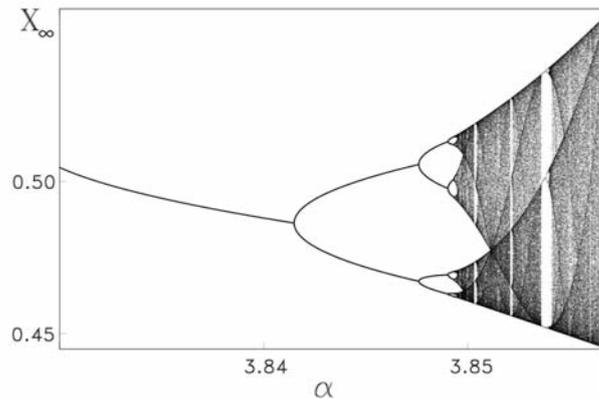


Figura 9. El brote en el árbol de bifurcaciones a partir del valor medio del período 3.

Este árbol reducido no sólo exhibe las bifurcaciones en potencias de 2 antes descritas, sino que contiene franjas blancas similares que definen (al sucederse también en otros brotes ad infinitum) valores de los parámetros en los cuales la dinámica es periódica para cualquier período, y todo esto de acuerdo al célebre orden de Sharkovskii.⁶

Dado que todo árbol reducido también incluye ramas de bifurcaciones similares a las encontradas al principio del diagrama, el árbol de Feigenbaum contiene una infinidad de espinas multifractales similares a las que se describieron en la Figura 4. Así, puede afirmarse que el follaje del árbol está compuesto por ramas periódicas, espinas y polvo.

El célebre diagrama en la Figura 7 se conoce como el árbol de Feigenbaum en virtud a los descubrimientos asombrosos hechos por Mitchell Feigenbaum⁷, tal y como se explica en la Figura 10. Él encontró que las bifurcaciones sucesivas exhiben un orden universal, tanto en las duraciones de las mismas entre umbral y umbral, Δ_n , y las distancias de una rama a la más cercana a partir de una línea que cruza todas las bifurcaciones, d_n .

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.
 UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

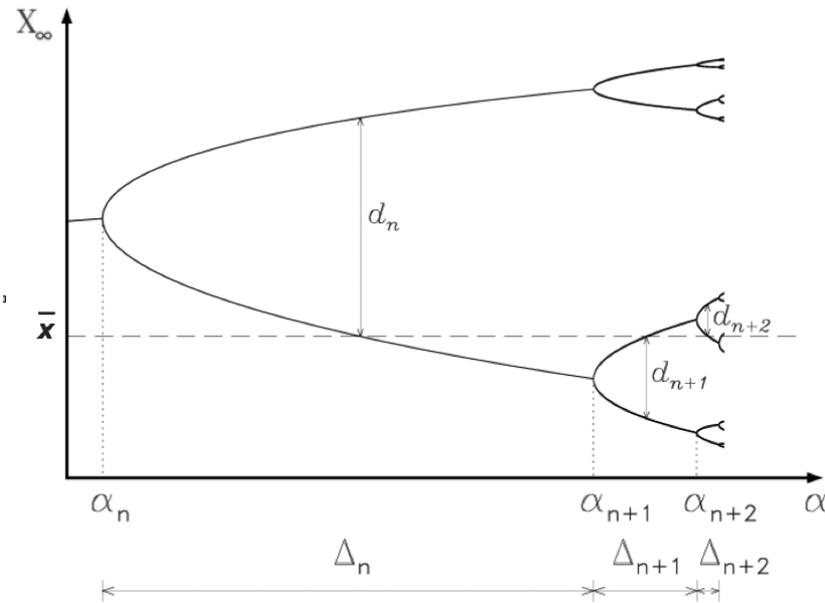


Figura 10. Bifurcaciones sucesivas $x = 1/2$ para las primeras bifurcaciones en la parábola logística.

Específicamente, Feigenbaum mostró que el cociente sucesivo de dichas cantidades converge a los números universales $d_n/d_{n+1} \rightarrow F_1 \approx -2.503$ y $\Delta_n/\Delta_{n+1} \rightarrow F_2 \approx 4.669$ y esto resulta ser cierto no sólo para la parábola logística al principio del diagrama de las bifurcaciones, sino para cualquiera de los infinitos brotes dentro del árbol.

Aunque Feigenbaum no descubrió el diagrama de las bifurcaciones, fue él quien encontró que existía un orden en el camino del orden al caos mediante una cadena de bifurcaciones arbitraria, pues las constantes universales de Feigenbaum F_1 y F_2 no sólo son válidas para la ecuación logística sino que lo son también para una infinidad de ecuaciones que tienen un pico, tal y como se ilustra en la Figura 10 para las ecuaciones sencillas, de izquierda a derecha, $X_{k+1} = \alpha X_k (1 - X_k^3)$ y $X_{k+1} = \alpha X_k (1 - X_k)^3$.

Tal y como se explicó para la parábola logística, estas higueras tienen una raíz recta, una rama esbelta que surge al pasar el primer umbral $X = Y$, una secuencia de ramas que reflejan las bifurcaciones y umbrales sucesivos y, arriba en el árbol y de una manera entrelazada, muchísimas ramas periódicas que generan espinas al final de todas las franjas blancas, y, aún más comúnmente, el follaje polvoriento del caos.

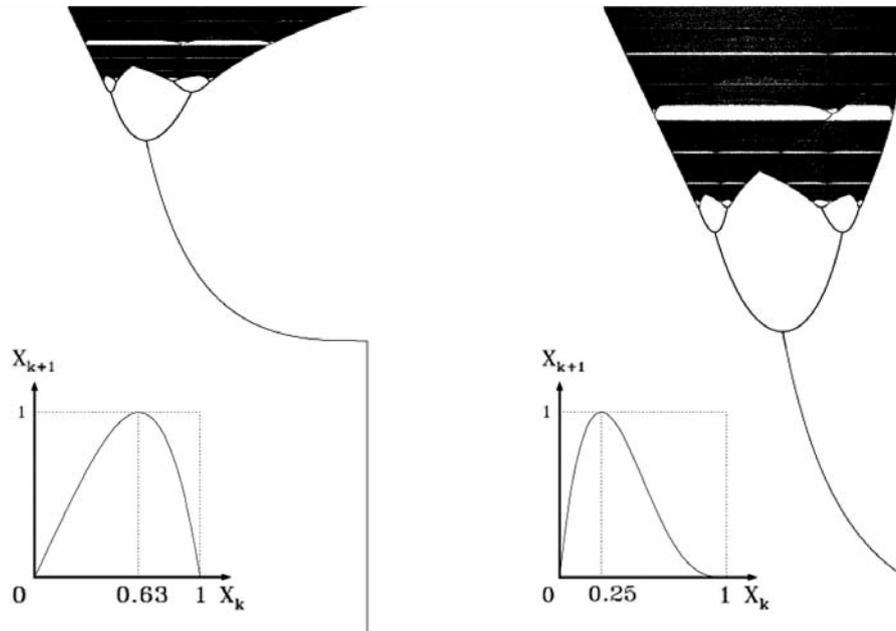


Figura 11. Higuera para dos ecuaciones no lineales sencillas.

Notablemente, todos los brotes infinitos de ramas a hojas polvorizadas en estos y muchos más árboles caóticos suceden de acuerdo a las mismas constantes F_1 y F_2 , y todo esto es cierto para sus infinitos árboles reducidos.

4. Una Aplicación Relevante del Caos en la Física

Dentro de los descubrimientos prácticos más pertinentes de la Teoría del Caos se encuentra su conexión con el calentamiento de fluidos, y en particular con la forma ordenada mediante la cual el proceso convectivo transforma un fluido desde un estado de quietud hasta uno eminentemente turbulento y caótico. Tal y como fue encontrado experimentalmente para el helio líquido, en la medida en que se le agrega calor al fluido, éste cambia de estado de acuerdo a las bifurcaciones del árbol de Feigenbaum, y lo hace en aumentos de temperatura que son acordes a la constante F_2 , hasta donde es posible hacer las observaciones del caso⁸.

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD. UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

Estos resultados sencillos e inesperados, y otros relacionados con otros sistemas tanto físicos como relativos a otras disciplinas⁹⁻¹⁰, ayudaron a validar la teoría y establecieron la posibilidad de comprender la dinámica de diversos procesos en términos de un parámetro que, como α en la ecuación logística y el calor en la convección, termina representando la esencia del sistema. Ciertamente, los resultados continúan siendo sorprendentes, porque en el estudio de diversos sistemas complejos se esperaba la necesidad de emplear ecuaciones diferenciales complicadas y no representaciones discretas, y porque el empleo de dichas nociones resulta en un paradigma particularmente sencillo y no dependiente del concepto del azar para intentar entender la complejidad natural.

5. ¿Caos o no Caos? Una Pregunta de Paz

Al ponderar las bellas ideas que dan lugar al caos mediante una cascada de bifurcaciones, es sensible considerar los mecanismos sencillos y universales allí presentes para dilucidar, al menos parabólicamente, cómo evitar la violencia turbulenta que experimentamos en nuestras vidas⁵, en especial cuando estamos rodeados de un ‘calor’ excesivo que nos lleva a un estado de vida ‘caótico’.

Después de todo, y de una manera proverbial, el nivel de calor por medio del cual vivimos, es decir el parámetro genérico α que define nuestra parábola, determina nuestra logística esencial. Pues α determina nuestra dinámica ordenada o desordenada, nuestra elección de lo sencillo o de lo complejo y nuestro subsecuente estado de atracción a la serenidad y la paz o al desasosiego y la turbulencia.

Como el calor α en efecto define el estado final del proceso, podemos comprender que es sabio el mantenerlo pequeño ($\alpha \leq 1$), tanto en el mundo como dentro de nosotros mismos, para evitar amplificarlo desproporcionalmente de generación en generación y así evadir las no-linealidades que nos alejan de la esencia, es decir, que nos llevan a crecer espinas y a ‘morder el polvo’. Pues a pesar de que las higueras exhiben un orden en su camino hacia el desorden,

podemos apreciar en los brincos insulsos, en los atrayentes extraños, y también en aquellos periódicos o aún en un punto fijo positivo, la ansiosa y tonta frustración que muchas veces experimentamos, y tantas veces de una forma determinista, engreída y predecible, cuando, al escoger vivir con afán, viajamos de sitio en sitio y acaloradamente sin encontrar la raíz.

En este espíritu, la mejor solución, para cada uno de nosotros y para el mundo en general, es el reducirle el ritmo a la vida, bajándonos del árbol como simbólica y literalmente lo hizo un pequeño hombre enmendando su camino al oír un fiel llamado¹¹, de modo que al bajar debajo del umbral primario, esto es la recta $X = Y$, podamos vivir sin turbulencia, sin caos, y en verdadera mansedumbre en el estado robusto simbolizado por $X_{\infty} = 0$. Pues existe una marcada diferencia entre una condición aparentemente laminar como ocurre en las llamadas ‘bifurcaciones tangenciales’ y el vivir verdaderamente en paz, pues no hay cómo escaparse por la tangente cuando nuestras acciones contienen estallidos caóticos carentes de paz y llenos de intermitencia³.

Como converger al origen resulta ser el único estado deseado, es decir, el estar sujetos a la raíz mansa de la higuera y protegidos por el umbral $X = Y$, y como esto significa no la ruina al perder todos nuestros ‘conejos’, sino que engendra nuestra riqueza al abandonarnos a vivir confiando en la vida, viviendo a números de Reynolds bajos, de modo que podamos comunicarnos, es pertinente notar que dicha condición puede lograrse también cuando el peor de los caos nos rodea.

Tal y como lo ilustra la Figura 12, cuando $\alpha = 4$, es decir cuando el parámetro es máximo y el calor es “infernial,” existen caminos que evitan vagar para siempre. Éstas son las pre imágenes del cero, construidas empleando la parábola logística en reversa y dando lugar a un diagrama binario, que en su dinámica precisa siguen una extremadamente delicada rayuela, y encuentran el punto medio que las lleva a retornar a la raíz; también dibujan, curiosamente, en dos rotaciones (abajo a arriba e izquierda a derecha) el mismo símbolo de la raíz, ahora cuadrada.⁵

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.
UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

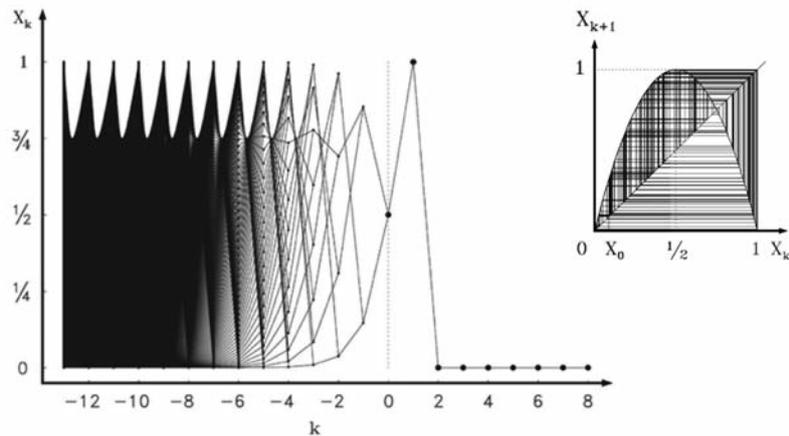


Figura 12. Orbitas de la parábola logística, $\alpha = 4$, que terminan en el cero.

Pues aunque el pasado parece lucir casi igual en virtud a lo exquisitamente entrelazados que están los diversos casos en la plenitud del caos, es trágico terminar oscilando para siempre tal y como lo muestra la Figura 13 cada tres generaciones, o cada número arbitrario de generaciones que da lugar a otros diagramas binarios que evitan el atrayente extraño.

Y es que resulta ser más trágico aún, si la tragedia pudiese ser cuantificable, el pasar arbitrariamente cerca del punto medio y perderse entrar por él, tal y como lo muestra la Figura 14. Pues el efecto mariposa, con toda probabilidad y aunque parezca brindarnos la opción de visitar todos los espacios, nos deja irremediabilmente atrapados en un atrayente extraño, vacío, polvoriento e incompleto que desafortunadamente no incluye la paz, dado que no contiene ni al origen ni a sus pre imágenes infinitamente contables.

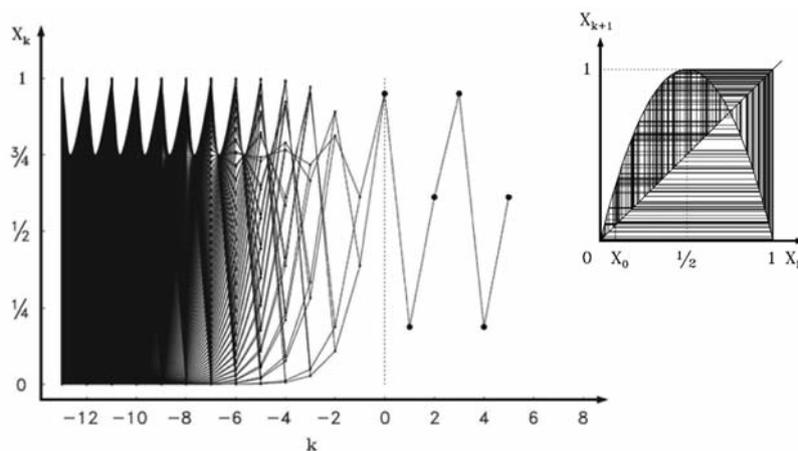


Figura 13. Orbitas de la parábola logística, $\alpha = 4$, que terminan en un ciclo que se repite cada 3 generaciones.

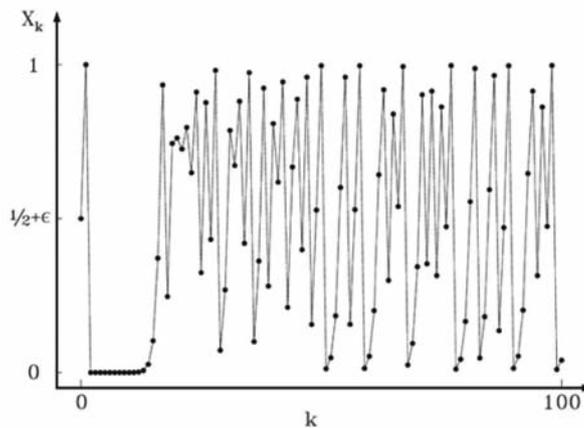


Figura 14. Orbitas de la parábola logística, $\alpha = 4$, a partir de $X_0 = 1/2 + \epsilon$, $\epsilon = 0.00001$.

Al final, la ciencia moderna de la complejidad nos permite visualizar nuestras opciones antiguas y reitera que siempre es mejor, independientemente de donde estemos, vivir serenamente, en paz, de una manera simple y escogiendo de veras abandonarnos a la raíz que es el amor. Pues nadie llega al origen sino abandonándose al umbral $X = Y$, que nos protege de las espinas divisivas y del polvo mortífero que caracterizan el caos y su turbulencia. Pues no hay fruto dulce alguno en el diagrama sino en la raíz.

Las ideas aquí expuestas no sólo recuerdan enseñanzas antiguas y llenas de sentido común sino también parábolas misteriosas acerca de higueras simbólicas. Nuestros primeros padres, al morder el polvo se cubrieron con las hojas de una higuera¹², y aquí dichas hojas son coherentes con su edicto de muerte. Quien dijo ser el umbral y camino maldijo a una higuera alegórica por no tener fruto y la secó hasta la raíz¹³, y aquí sólo la raíz recibe su paz al estar ligada con el origen. Y él habló acerca de su retorno, feliz para algunos y terrible para otros, mediante diversas señales caóticas y una higuera parabólica con rama tierna y brotes, y también otros árboles¹⁴, y aquí despuntaron tres tales y existen muchos más.

Claro está, proponer fechas de eventos cósmicos y escatológicos no es posible, pero lo que se infiere de estas reflexiones es una invitación, acaso inesperada por provenir de la ciencia, hacia la paz, el origen, la raíz, lo recto, y en resumen al amor. Para concluir, a continuación se incluye la letra de una poesía-canción acaso urgente.

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.
UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

En medio del caos

Es mejor llegar al origen...

En la ciencia moderna
hay un árbol católico,
con raíz sempiterna
y un follaje caótico.

Este icono refleja
la simpleza del meollo,
y poderoso define
la salida del embrollo.

Oye amigo comprende
fiel aviso de la higuera:
el que se crea valiente
va a llorar su ceguera.

Oye bien santo consejo
el ya bajarse es prudente:
es vital hallar lo recto
para ganar toda suerte.

Y entiende que...

En medio del caos

hay una salida
que lleva a la vida.

En medio del caos

se halla una guarida
que sana la herida.

En lo alto de la higuera

hay un caminito
que va al infinito.

En lo alto de la higuera

se halla un puntito
que lo une todito.

En medio del caos

hay una rayuela
que brinca sin pena.

En medio del caos

se halla un omega
que nutre y libera.

En lo alto de la higuera

hay un pozo fino
que riega el destino.

En lo alto de la higuera

se halla un amigo
que da lo divino.

En medio del caos

mira allí está,
en medio del caos
todita verdad,
en medio del caos

MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.
UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

una puerta abierta,
en medio del caos
que lleva a la esencia,
en medio del caos
con todo equilibrio,
en medio del caos
se evita el peligro,
en medio del caos
caminando recto,
en medio del caos
se halla lo cierto.

En lo alto de la higuera
ve que no invento,
en lo alto de la higuera
un oasis muy bello,
en lo alto de la higuera
hay un trigo bueno,
en lo alto de la higuera
rodeado de maleza,
en lo alto de la higuera
hay un ojo de aguja,
en lo alto de la higuera
que pasas y cura,
en lo alto de la higuera
te bajas, sonrías,
en lo alto de la higuera
y llegas al origen.

En medio del caos
con la santa gloria,
en lo alto de la higuera

hallas la victoria,
en medio del caos
escrito en tu pecho,
en lo alto de la higuera
encuentras tu sueño,
en medio del caos
rodeado de la muerte,
en lo alto de la higuera
descubres ser fuerte,
en medio del caos
con el alma clara,
en lo alto de la higuera
no te pasa nada.

En medio del caos
en lo alto de la higuera. (4)

Ve que no miento, no lo dudes...

Ay bájate... (8)



MÁS LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD.
UNA PARÁBOLA PERENNE Y ACASO URGENTE EN LA TEORÍA DEL CAOS

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a mi esposa Marta como un testimonio adicional de fe, confiado en que, no por azar, llegará un milagro de vida que deberá llamarse como aquel quien creyó solamente al saber que había sido visto por él bajo la higuera.

Notas y obras consultadas

1. Este trabajo es una versión aumentada de C. E. PUENTE, «More lessons from complexity – The origin: The root of peace», E:CO, 8.3 (2006):115-122; similar a lo presentado en el II Seminario Bienal Internacional acerca de las implicaciones Filosóficas, Epistemológicas y Metodológicas de la Teoría de la Complejidad, La Habana, Cuba (2004).
2. MOON, Francis C.: *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientist and Engineers*, New York: John Wiley & Sons, 1987.
3. PEITGEN, Heinz-Otto; Hartmut JÜRGENS y Dietmar SAUPE: *Chaos and Fractals*, New York: Springer Verlag, 1992.
4. McCAULEY, Joseph L.: *Chaos, Dynamics and Fractals*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
5. PUENTE, Carlos E.: «Lecciones a partir de la complejidad. La hipotenusa el camino de la paz», *Complexus* 1.3: (2005) 32-53.
6. OTT, Edward: *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
7. FEIGENBAUM, Mitchell J.: «Quantitative universality for a class of nonlinear transformations», *Journal of Statistical Physics*, 19: (1978), 25-52.
8. MAURER, J. y A. LIBCHABER: «Rayleigh-Bénard experiment in liquid helium frequency locking and the onset of turbulence», *Journal de Physique Lettres*, 40: (1979), 419-423.
9. BAI-LIN, Hao: *Chaos*, Singapur: World Scientific, 1984.
10. CVITANOVIĆ, Predrag (Ed.), *Universality in Chaos*, Adam Hilger, Bristol: 1989.
11. Zaqueo se bajó de un sicomoro, de la misma familia de la higuera. Su conversión se relata en el Evangelio según San Lucas 19:1-10.
12. Adán y Eva se cubrieron con hojas de la higuera y luego les decretaron espinas y polvo como castigo. Esto se halla en el Libro del Génesis capítulo 3.

13. La inesperada maldición de la higuera se encuentra relatada en dos versiones. Una, a dos tiempos, en el Evangelio según San Marcos 11:12-25 y otra menos comprometida y más espectacular en el Evangelio según San Mateo 21:18-22.
14. El famoso discurso en el monte de los olivos, incluyendo versiones similares de una lección o parábola de la higuera, se hallan en el Evangelio según San Mateo capítulos 24 y 25, en el Evangelio según San Marcos capítulo 13, y en el Evangelio según San Lucas capítulo 21.