

Caos, Complejidad & Cristiandad

***5. La naturaleza
determinista del caos***

Carlos E. Puente

Universidad de California, Davis

Resumen

- *Introduce el mapa logístico y su dinámica asombrosa.*
- *Explica cómo dicha ecuación determinista da lugar a comportamientos periódicos y caóticos entrelazados.*
- *Introduce el diagrama de las bifurcaciones o el árbol de Feigenbaum.*
- *Explica por qué ocurre el “efecto mariposa”.*
- *Exhibe atractores caóticos en dos y tres dimensiones.*

La dinámica del mapa logístico

(May, 1976; Gleick, 1987; Schroeder, 1992; Turcotte, 1997)

El mapa logístico

- Alabada como uno de los logros científicos más importantes del siglo XX, conjuntamente con la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica, la **teoría del caos** provee símbolos útiles y conmovedores con relación a nuestra paz.

El mapa logístico

- Alabada como uno de los logros científicos más importantes del siglo XX, conjuntamente con la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica, la **teoría del caos** provee símbolos útiles y conmovedores con relación a nuestra paz.
- La ecuación prototípica empleada para ilustrar la bien establecida teoría es el sencillo **mapa logístico**:

$$X_{k+1} = \alpha X_k (1 - X_k)$$

donde X es el tamaño normalizado de una población (entre 0 y 1), digamos de **conejos**, k y $k+1$ son dos generaciones sucesivas y α es un **parámetro** que puede estar entre 0 y 4, inclusive.

El mapa logístico

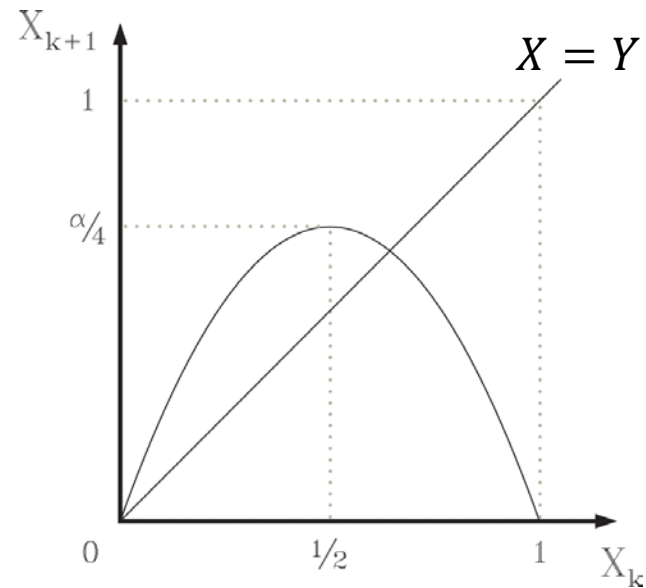
- Alabada como uno de los logros científicos más importantes del siglo XX, conjuntamente con la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica, la **teoría del caos** provee símbolos útiles y conmovedores con relación a nuestra paz.
- La ecuación prototípica empleada para ilustrar la bien establecida teoría es el sencillo **mapa logístico**:

$$X_{k+1} = \alpha X_k (1 - X_k)$$

donde X es el tamaño normalizado de una población (entre 0 y 1), digamos de **conejos**, k y $k+1$ son dos generaciones sucesivas y α es un **parámetro** que puede estar entre 0 y 4, inclusive.

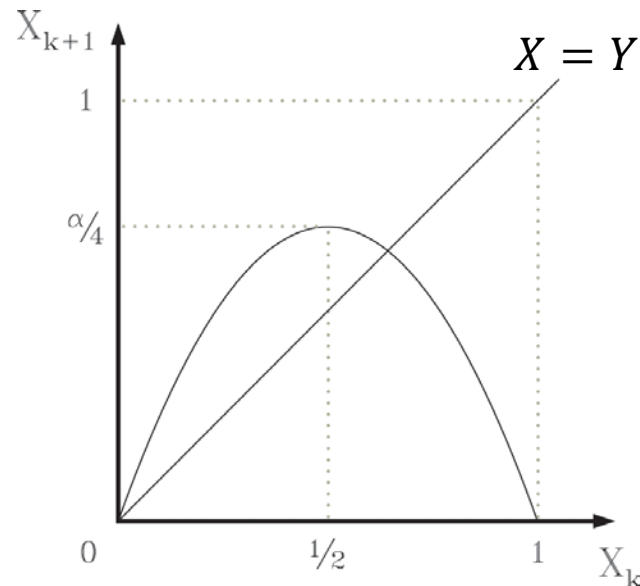
- La ecuación cuadrática define, de una generación a la siguiente, una gráfica simétrica con forma de **parábola**, una que pasa por los puntos (0,0) y (1,0) y cuyo pico por el medio es $\alpha/4$:

El mapa logístico



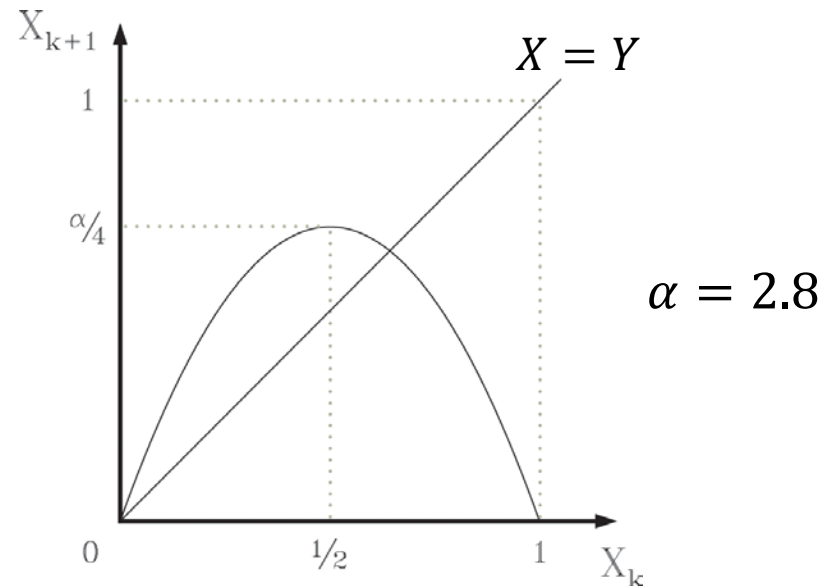
- La curva exhibe un aumento de generación a generación si la población es pequeña, pero una disminución si la población es grande, lo cual es **lógico**.

El mapa logístico



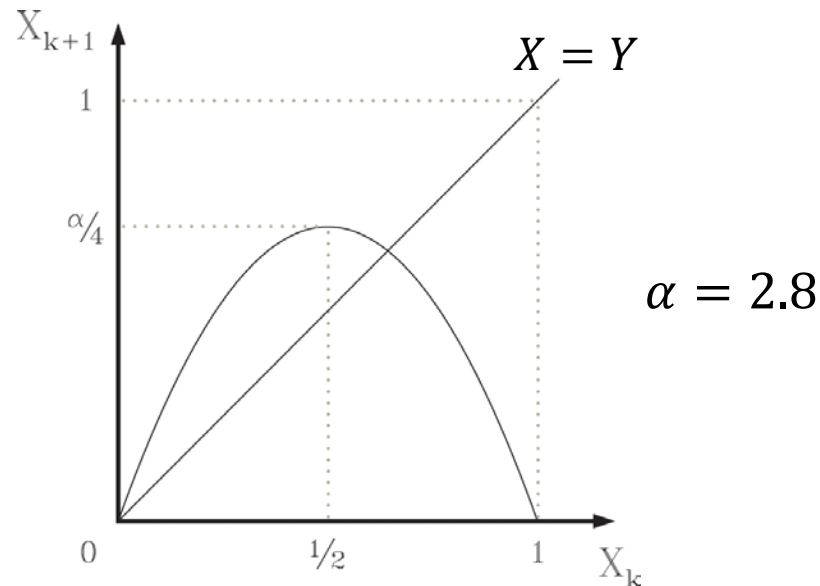
- La curva exhibe un aumento de generación a generación si la población es pequeña, pero una disminución si la población es grande, lo cual es *lógico*.
- Se ha agregado a la figura la recta $X = Y$ para calcular la evolución de una población que empieza en un tamaño X_0 : el siguiente tamaño se lee de la gráfica, y luego tal X_1 se lleva a la recta uno-a-uno para leer X_2 , etc.

El mapa logístico



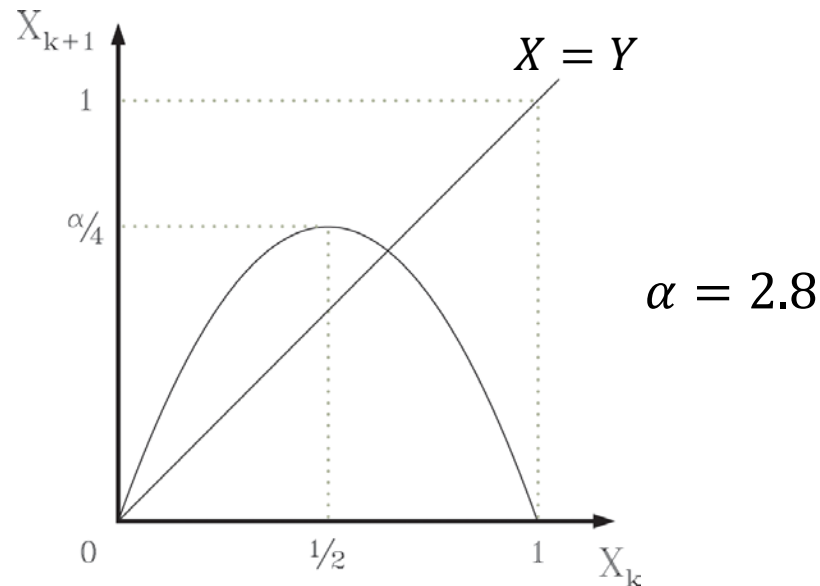
- Aquí se observa la evolución de una población, **reiterando** el mapa logístico, cuando el parámetro toma un valor de 2.8.

El mapa logístico



- Aquí se observa la evolución de una población, *reiterando* el mapa logístico, cuando el parámetro toma un valor de 2.8.
- Como se puede ver, la población converge a un valor X_∞ que es la intersección no nula entre la recta y la parábola, y este “*atrayente*” sucede siempre y cuando X_0 no sea ni 0 ni 1.

El mapa logístico

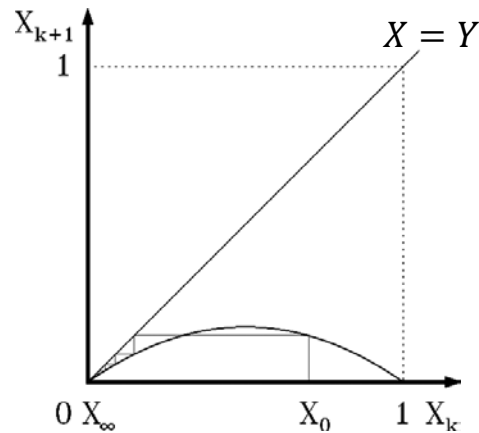


- Aquí se observa la evolución de una población, *reiterando* el mapa logístico, cuando el parámetro toma un valor de 2.8.
- Como se puede ver, la población converge a un valor X_∞ que es la intersección no nula entre la recta y la parábola, y este “*atrayente*” sucede siempre y cuando X_0 no sea ni 0 ni 1.
- Pero esto no siempre es así y lo que se obtiene depende del valor de α :

La dinámica logística

$$0 < \alpha \leq 1$$

$$X_{\infty} = 0$$

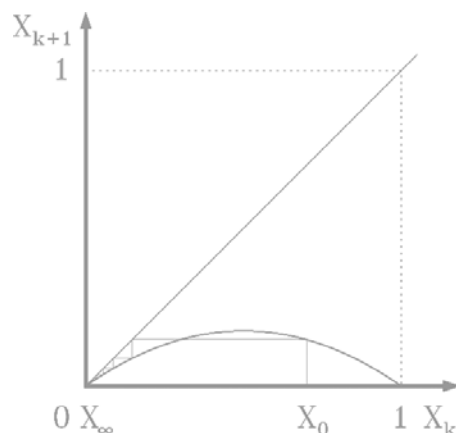


- Cuando la parábola está debajo de la línea, esto es cuando α es menor o igual a 1, la población se **extingue** y el **origen** atrae la dinámica para todo tamaño inicial X_0 .

La dinámica logística

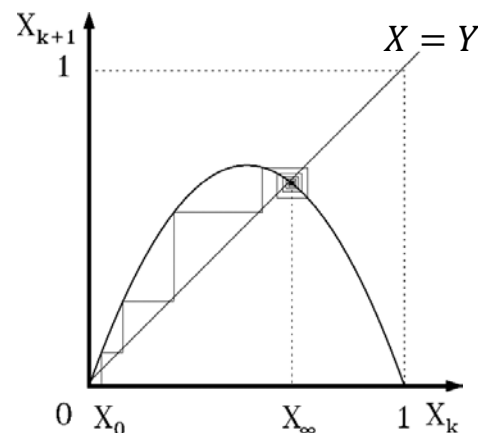
$$0 < \alpha \leq 1$$

$$X_{\infty} = 0$$



$$1 < \alpha \leq 3$$

$$X_{\infty} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

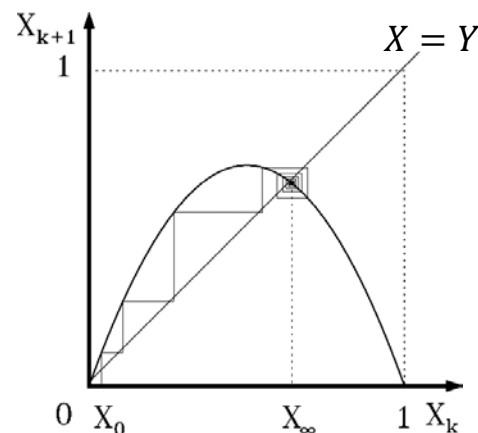
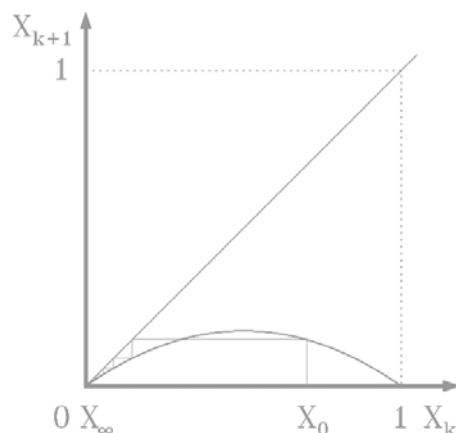


- Cuando la parábola está debajo de la línea, esto es cuando α es menor o igual a 1, la población se **extingue** y **el origen** atrae la dinámica para todo tamaño inicial X_0 .
- Ahora, cuando la curva “**cruza la raya**” y α está entre 1 y 3, la población converge a la intersección no-nula entre la línea y la parábola, al “**punto fijo**” dado por la ecuación mostrada, alfa menos uno sobre alfa.

La dinámica logística

$$0 < \alpha \leq 1$$

$$X_{\infty} = 0$$



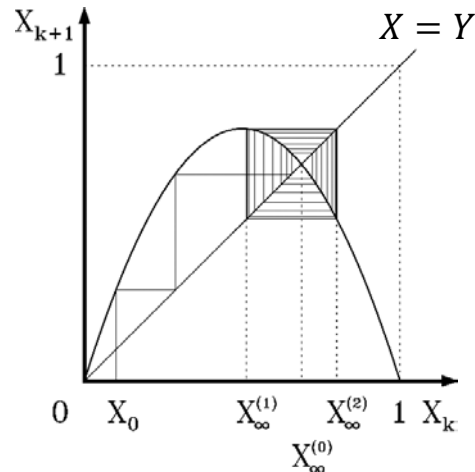
$$1 < \alpha \leq 3$$

$$X_{\infty} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

- Cuando la parábola está debajo de la línea, esto es cuando α es menor o igual a 1, la población se **extingue** y **el origen** atrae la dinámica para todo tamaño inicial X_0 .
- Ahora, cuando la curva “**cruza la raya**” y α está entre 1 y 3, la población converge a la intersección no-nula entre la línea y la parábola, al “**punto fijo**” dado por la ecuación mostrada, alfa menos uno sobre alfa.
- Cuando la parábola excede la recta, el **origen** siempre **repele**. (!)

La dinámica logística

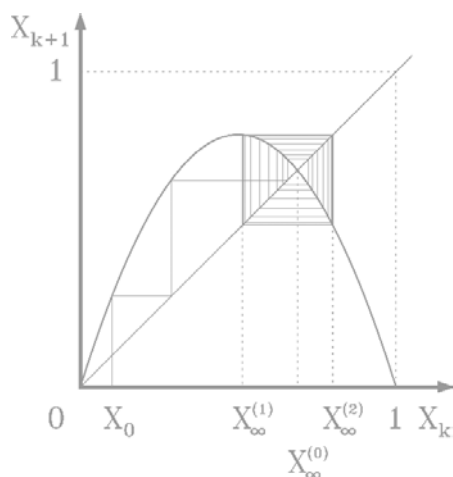
$\alpha = 3.2$
período 2



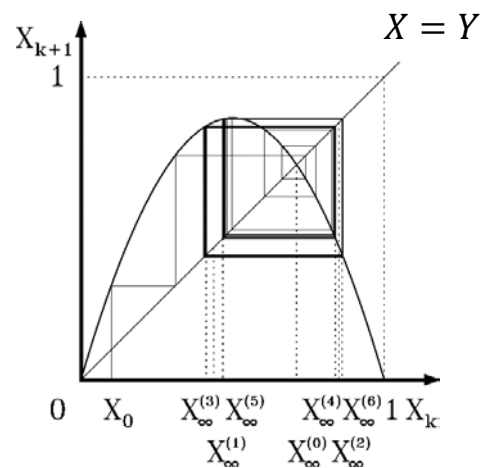
- Cuando α es mayor que 3, lo que le pasó al origen le ocurre a la otra intersección entre la línea y la curva: tal localización **repele** la dinámica y aparecen **repeticiones** cada **dos generaciones**. (!)

La dinámica logística

$\alpha = 3.2$
período 2



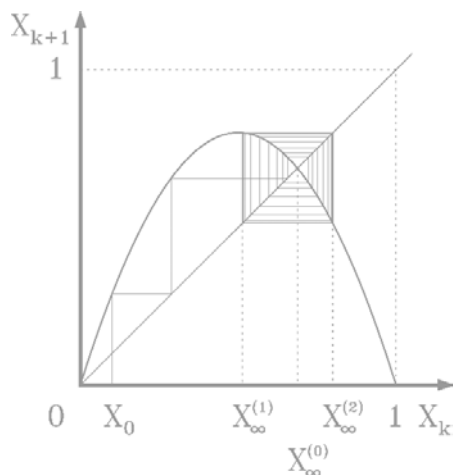
$\alpha = 3.46$
período 4



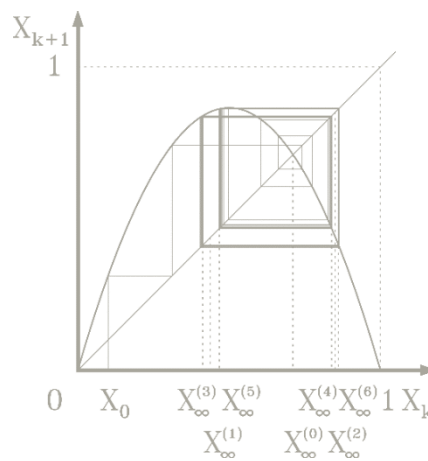
- Cuando α es mayor que 3, lo que le pasó al origen le ocurre a la otra intersección entre la línea y la curva: tal localización **repele** la dinámica y aparecen **repeticiones** cada **dos generaciones**. (!)
- Si α continúa aumentando, dichas repeticiones **repelen** y se posan otras **repeticiones** cada **cuatro generaciones**. (!)

La dinámica logística

$\alpha = 3.2$
período 2



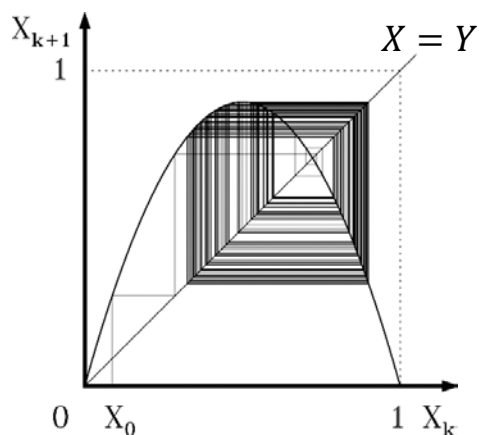
$\alpha = 3.46$
período 4



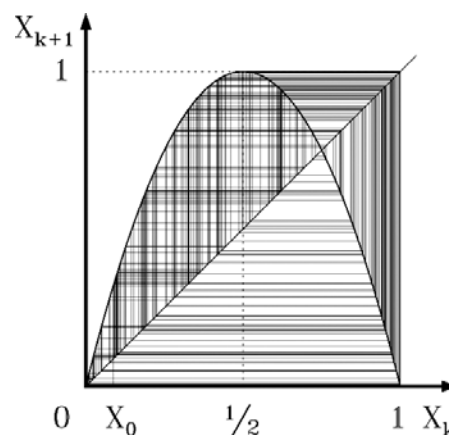
- Cuando α es mayor que 3, lo que le pasó al origen le ocurre a la otra intersección entre la línea y la curva: tal localización **repele** la dinámica y aparecen **repeticiones** cada **dos generaciones**. (!)
- Si α continúa aumentando, dichas repeticiones **repelen** y se posan otras **repeticiones** cada **cuatro generaciones**. (!)
- Asombrosamente, aparece una “**cadena de bifurcaciones**”: toda potencia de 2 sucede antes de $\alpha_\infty \approx 3.5699\dots$ (!)

La dinámica logística

$\alpha = 3.6$
aperiódico
extraño



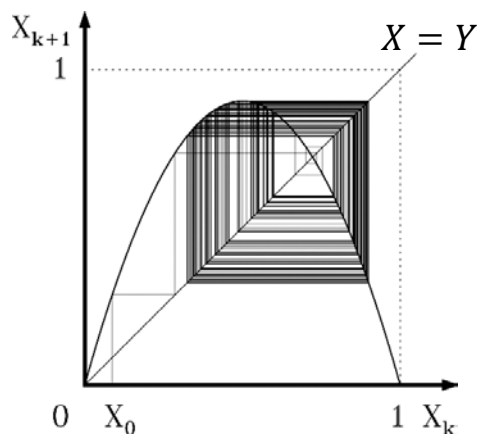
$\alpha = 4$
aperiódico
caótico



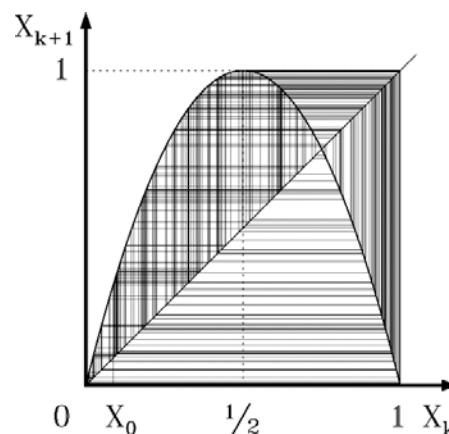
- Cuando $\alpha > \alpha_\infty$, aparecen atrayentes infinitos “**extraños**” sin repetición, es decir, como en la expansión de números irracionales, y ellos parecen estar guiados por el azar, aunque son definidos por un proceso **determinista**. (!)

La dinámica logística

$\alpha = 3.6$
aperiódico
extraño



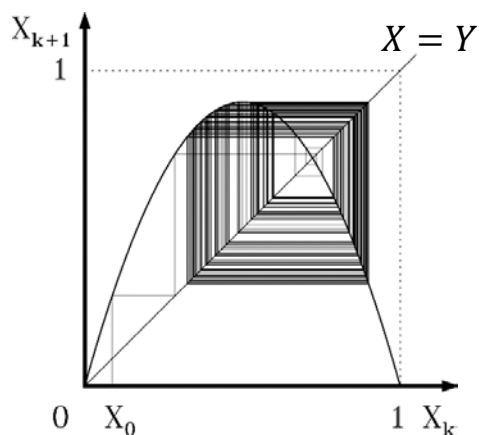
$\alpha = 4$
aperiódico
caótico



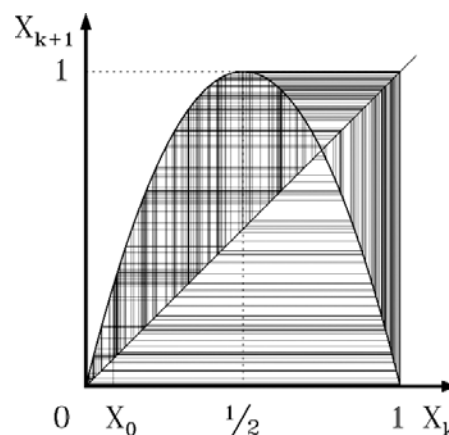
- Cuando $\alpha > \alpha_\infty$, aparecen atractores infinitos “**extraños**” sin repetición, es decir, como en la expansión de números irracionales, y ellos parecen estar guiados por el azar, aunque son definidos por un proceso **determinista**. (!)
- Como se observa, tales conjuntos tienen la estructura del **polvo** y ellos definen el bien llamado comportamiento **caótico**. (!)

La dinámica logística

$\alpha = 3.6$
aperiódico
extraño



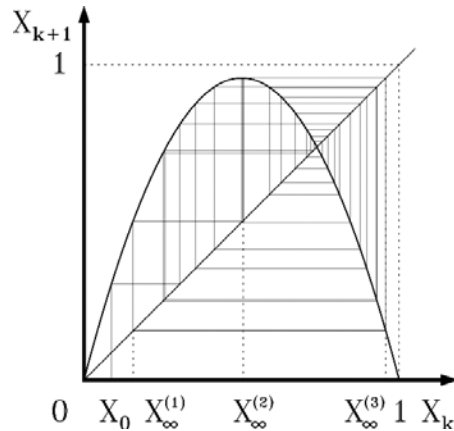
$\alpha = 4$
aperiódico
caótico



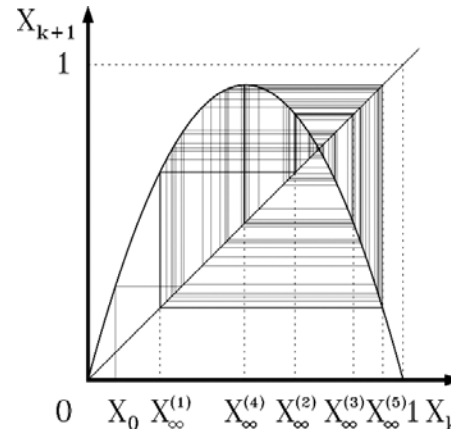
- Cuando $\alpha > \alpha_\infty$, aparecen atrayentes infinitos “**extraños**” sin repetición, es decir, como en la expansión de números irracionales, y ellos parecen estar guiados por el azar, aunque son definidos por un proceso **determinista**. (!)
- Como se observa, tales conjuntos tienen la estructura del **polvo** y ellos definen el bien llamado comportamiento **caótico**. (!)
- Cuando $\alpha = 3.6$ el atrayente contiene dos zonas separadas, mientras que para $\alpha = 4$ el conjunto abarca casi todo el intervalo de 0 a 1, pero con **huequitos** al ser **polvoriento**.

La dinámica logística

$\alpha = 3.83$
período 3



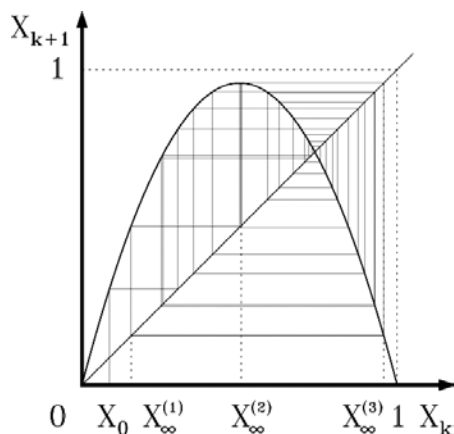
$\alpha = 3.74$
período 5



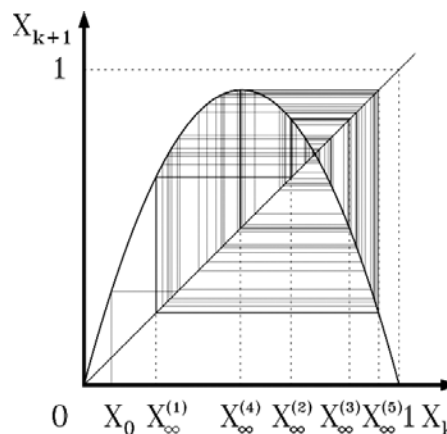
- Cuando $\alpha > \alpha_\infty$, también aparecen atrayentes **repetitivos** cuyas repeticiones no son potencias de 2: para $\alpha = 3.83$ aparecen oscilaciones cada **tres generaciones** y para $\alpha = 3.74$ las hay cada **cinco generaciones**. (!)

La dinámica logística

$\alpha = 3.83$
período 3



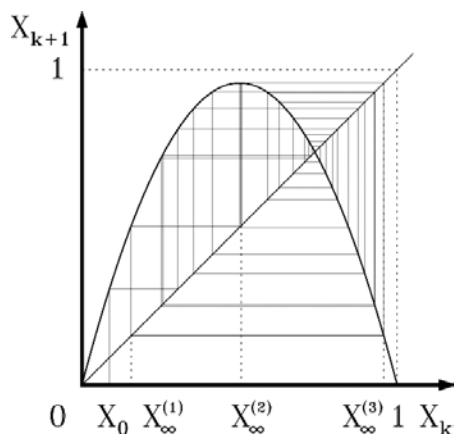
$\alpha = 3.74$
período 5



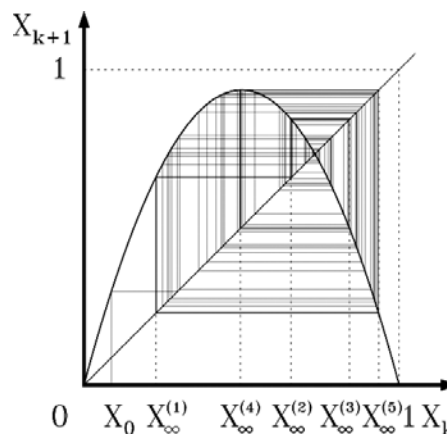
- Cuando $\alpha > \alpha_\infty$, también aparecen atrayentes *repetitivos* cuyas repeticiones no son potencias de 2: para $\alpha = 3.83$ aparecen oscilaciones cada *tres generaciones* y para $\alpha = 3.74$ las hay cada *cinco generaciones*. (!)
- Como por arte de magia, la curvaturas de las parábolas se *sincronizan* y las líneas horizontales-verticales dan lugar a *repeticiones*. (!)

La dinámica logística

$\alpha = 3.83$
período 3



$\alpha = 3.74$
período 5



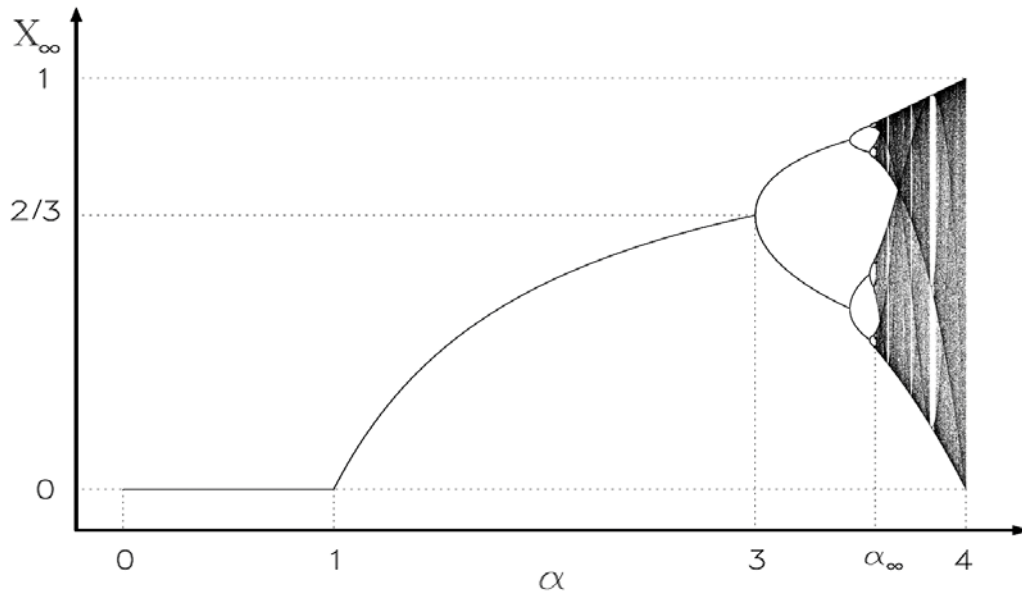
- Cuando $\alpha > \alpha_\infty$, también aparecen atrayentes **repetitivos** cuyas repeticiones no son potencias de 2: para $\alpha = 3.83$ aparecen oscilaciones cada **tres generaciones** y para $\alpha = 3.74$ las hay cada **cinco generaciones**. (!)
- Como por arte de magia, la curvaturas de las parábolas se **sincronizan** y las líneas horizontales-verticales dan lugar a **repeticiones**. (!)
- De una forma admirable, el mapa logístico define oscilaciones que corresponden a cualquier número natural. (!)

El diagrama de las bifurcaciones

(Feigenbaum, 1978; Maurer y Libchaber, 1979; Puente, 2014, 2019)

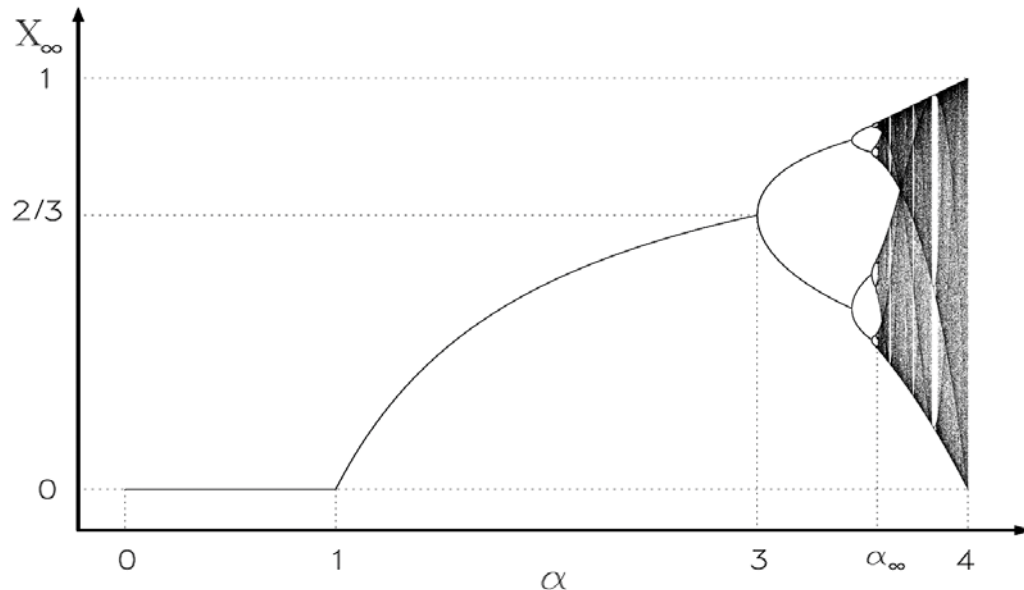
El diagrama de las bifurcaciones

- X_∞ en función de α , para atractores estables, es conocido como el *diagrama de las bifurcaciones*:



El diagrama de las bifurcaciones

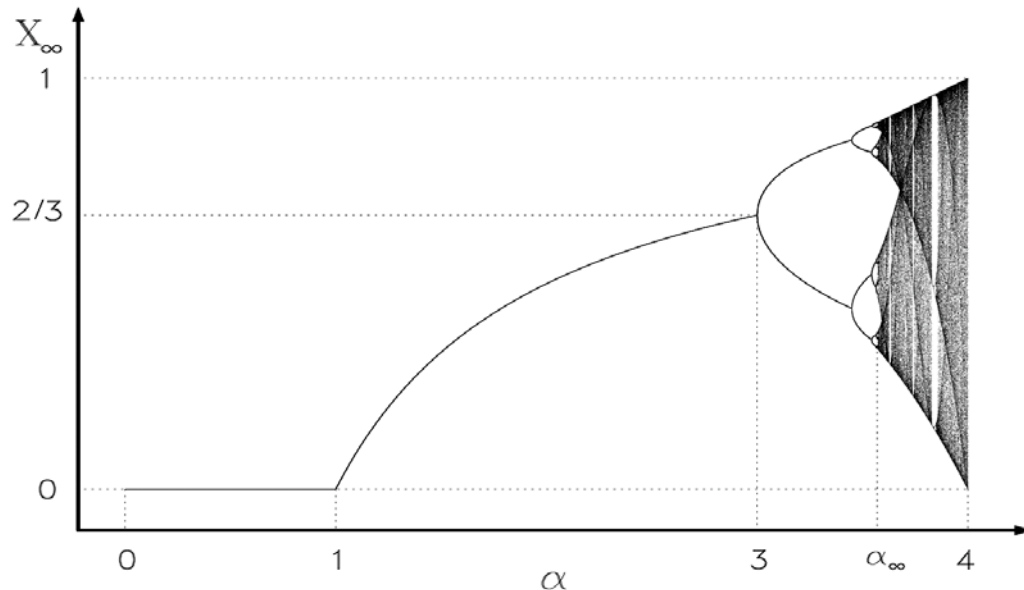
- X_∞ en función de α , para atractores estables, es conocido como el *diagrama de las bifurcaciones*:



- Este tiene la forma de un **árbol** si se rota 90 grados en sentido anti-horario.

El diagrama de las bifurcaciones

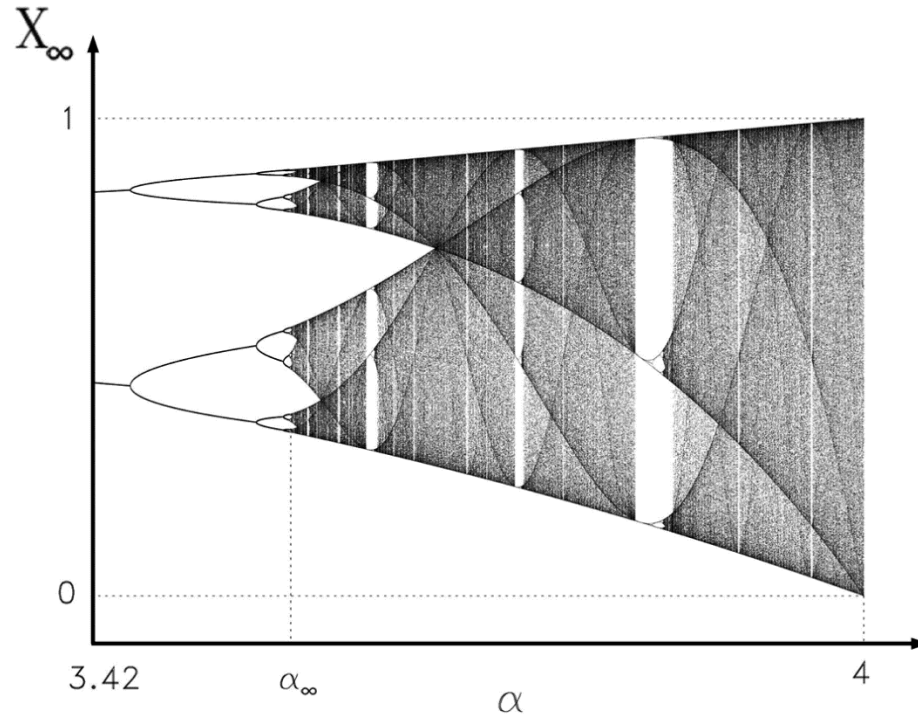
- X_∞ en función de α , para atractores estables, es conocido como el *diagrama de las bifurcaciones*:



- Este tiene la forma de un *árbol* si se rota 90 grados en sentido anti-horario.
- Después de α_∞ , lo **periódico** y lo **caótico** se entrelazan, y los atractores extraños infinitos son puntitos en líneas verticales.

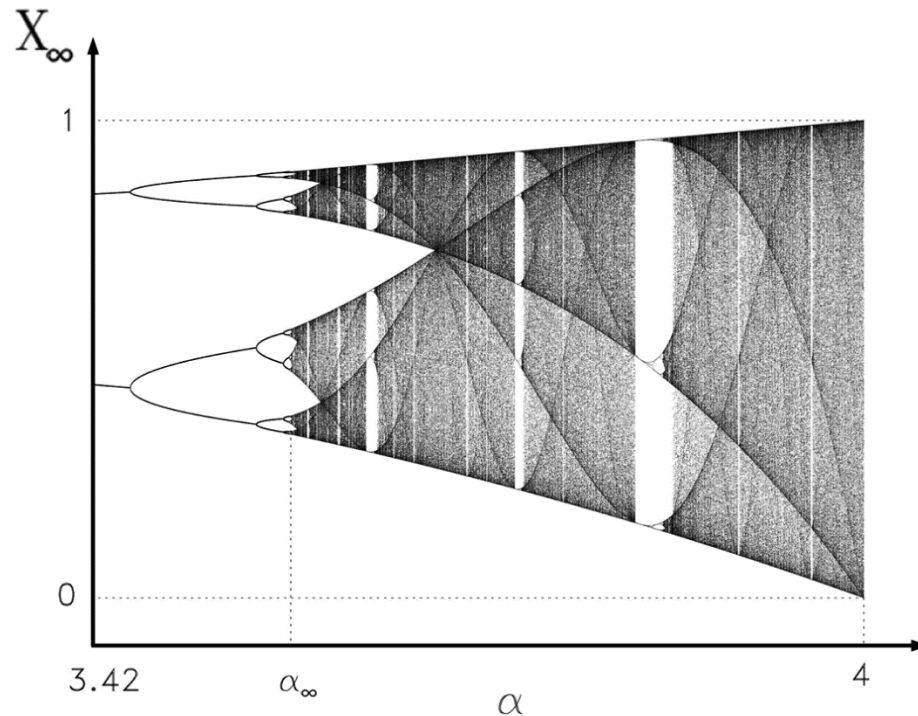
El diagrama de las bifurcaciones

- La *cola* llamativa del diagrama se observa en más detalle aquí:



El diagrama de las bifurcaciones

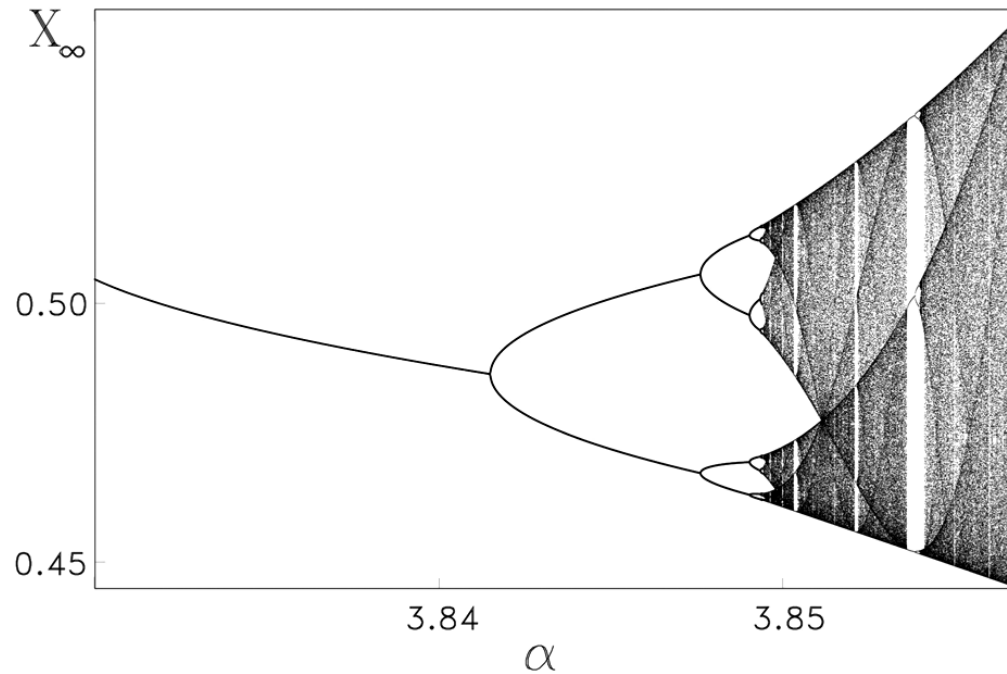
- La *cola* llamativa del diagrama se observa en más detalle aquí:



- El “*árbol*” contiene “*brotos*” en “*bandas blancas*” periódicas para cualquier valor mayor que 2, y las más notorias, de derecha a izquierda, corresponden a períodos 3, 5 y 6. (!)

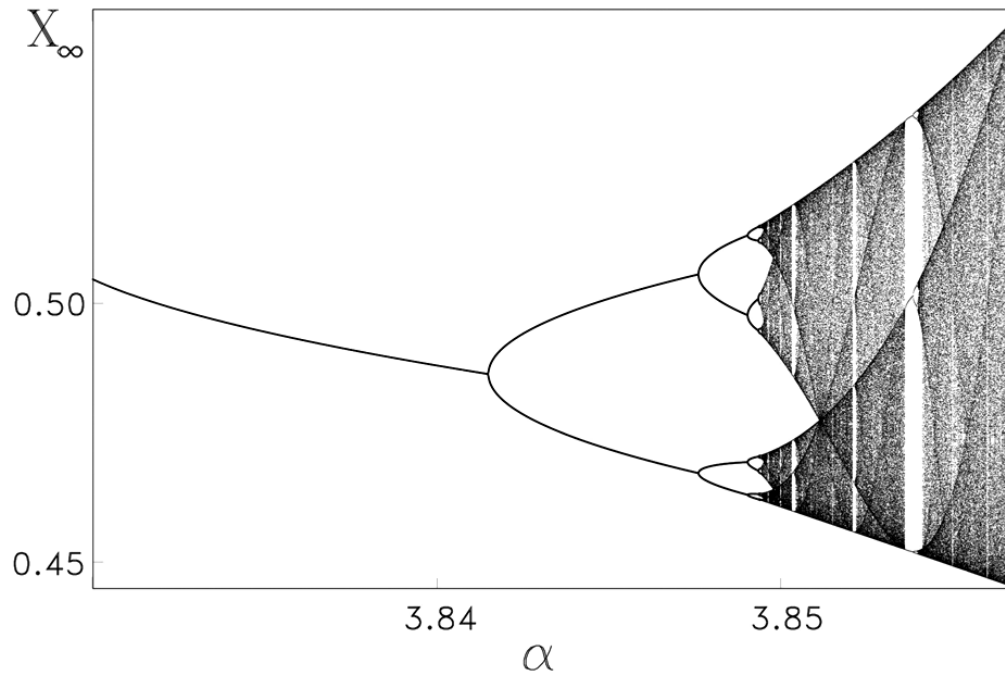
El diagrama de las bifurcaciones

- Al amplificar el *brote* central del período 3 resulta:



El diagrama de las bifurcaciones

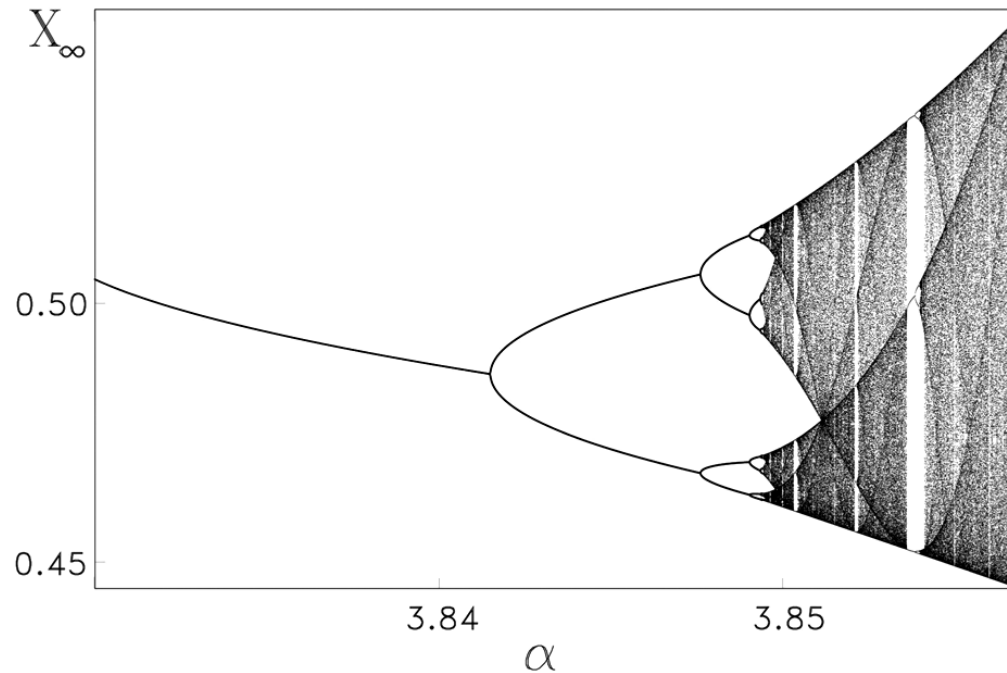
- Al ampliar el *brote* central del período 3 resulta:



- Este es una copia reducida del *follaje* del *árbol*, sin la *raíz* recta. (!)

El diagrama de las bifurcaciones

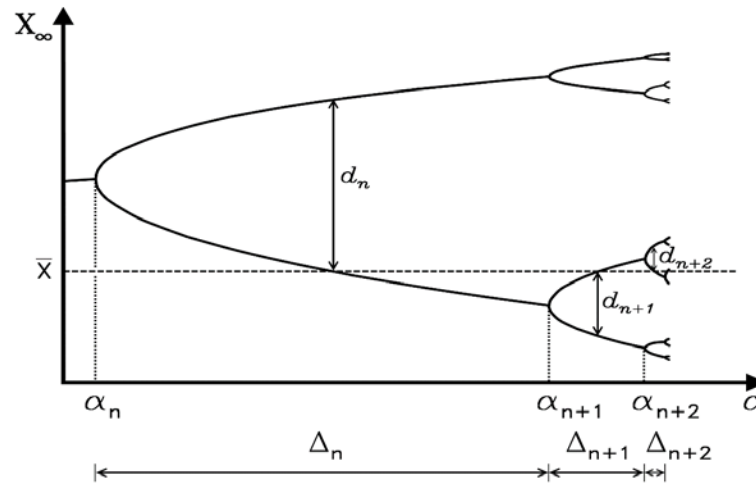
- Al ampliar el *brote* central del período 3 resulta:



- Este es una copia reducida del *follaje* del *árbol*, sin la *raíz* recta. (!)
- Como el brote contiene brotecitos, el diagrama exhibe una exquisita **auto-similaridad** *ad infinitum*. (!)

El diagrama de las bifurcaciones

- Existe un **orden** en esta ruta hacia el **caos**, pues, como lo demostró *Mitchell Feigenbaum* en 1978, todas las bifurcaciones suceden de acuerdo a dos constantes **universales**:

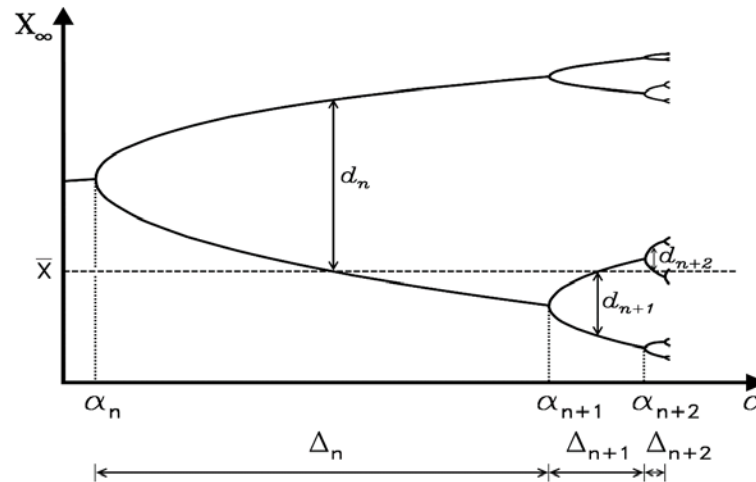


$$d_n/d_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_1 = -2.50 \dots \quad \Delta_n/\Delta_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_2 = 4.66 \dots$$

aperturas
duraciones

El diagrama de las bifurcaciones

- Existe un *orden* en esta ruta hacia el *caos*, pues, como lo demostró *Mitchell Feigenbaum* en 1978, todas las bifurcaciones suceden de acuerdo a dos constantes *universales*:



$$d_n/d_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_1 = -2.50 \dots \quad \Delta_n/\Delta_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_2 = 4.66 \dots$$

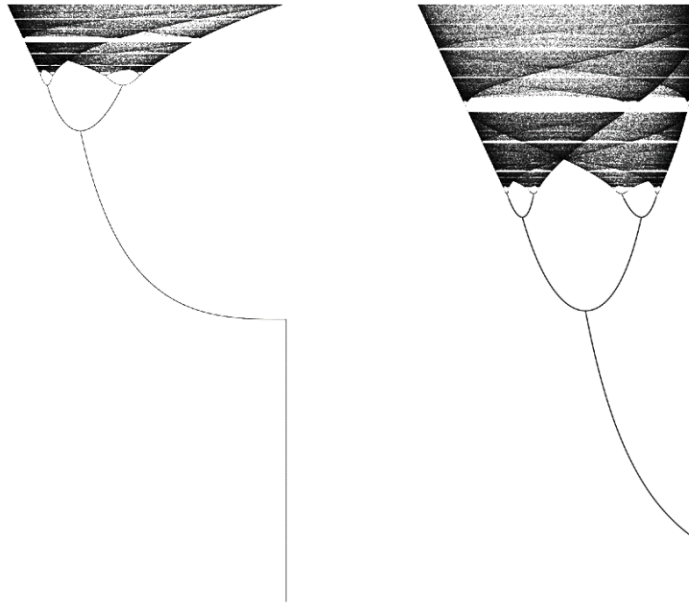
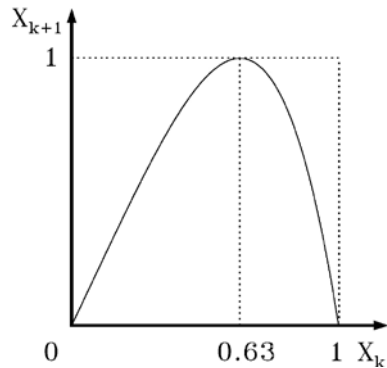
aperturas *duraciones*

- El diagrama de las bifurcaciones también se le conoce como el “*árbol de Feigenbaum*”, o “*la higuera*”, traduciendo del alemán. (!)

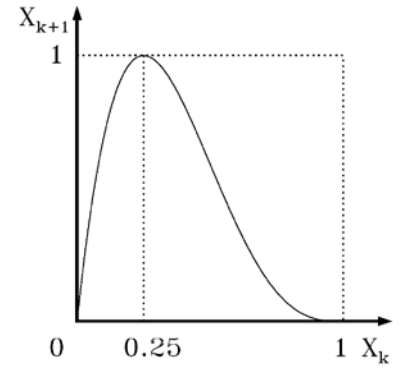
El diagrama de las bifurcaciones

- Los resultados son en verdad *universales*, pues suceden para cualquier curva que contiene un solo pico:

$$f(X) = \alpha X(1 - X^3)$$



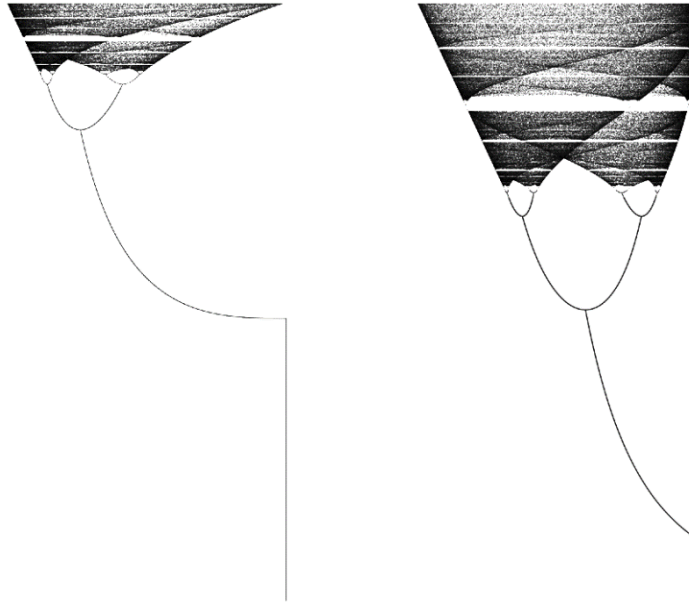
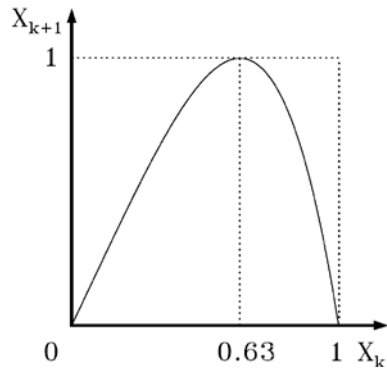
$$f(X) = \alpha X(1 - X)^3$$



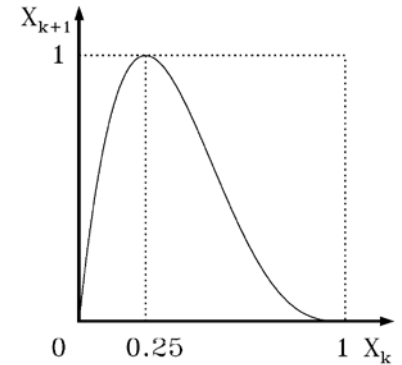
El diagrama de las bifurcaciones

- Los resultados son en verdad *universales*, pues suceden para cualquier curva que contiene un solo pico:

$$f(X) = \alpha X(1 - X^3)$$



$$f(X) = \alpha X(1 - X)^3$$

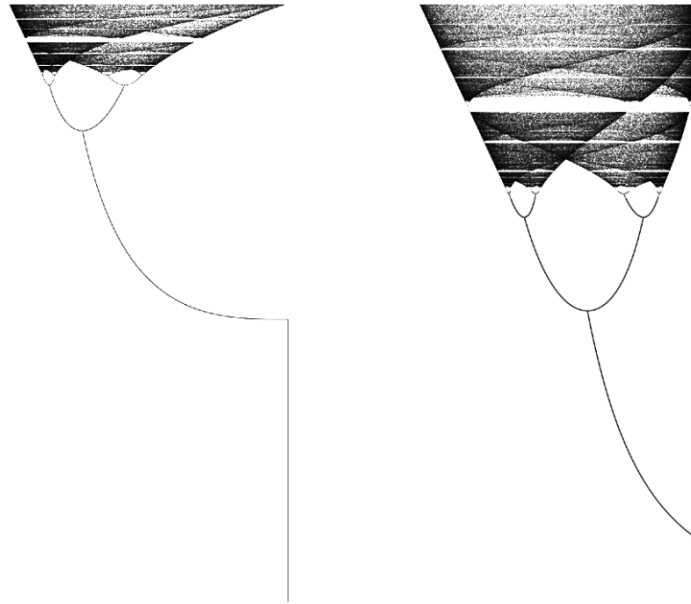
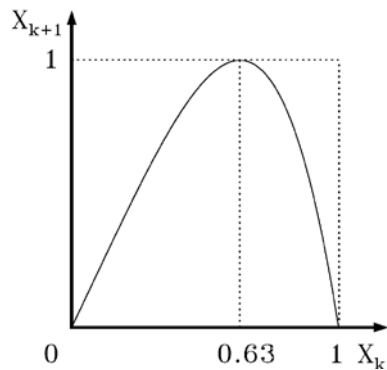


- A la *Feigenbaum*, estos árboles tienen una *raíz recta*, una “*rama tierna*”, y *ramas periódicas* entrelazadas con el *polvo del caos*.

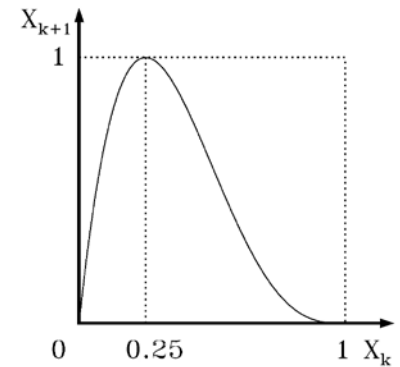
El diagrama de las bifurcaciones

- Los resultados son en verdad *universales*, pues suceden para cualquier curva que contiene un solo pico:

$$f(X) = \alpha X(1 - X^3)$$



$$f(X) = \alpha X(1 - X)^3$$

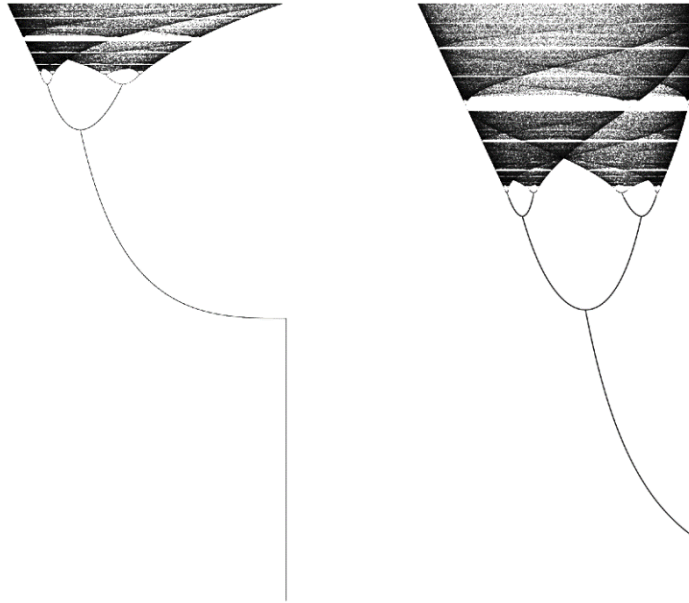
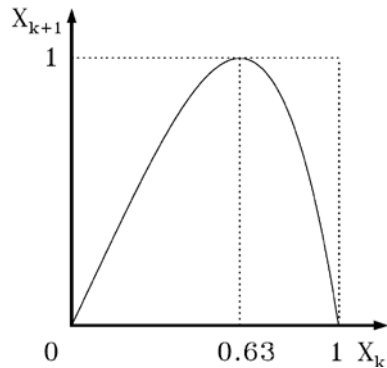


- A la *Feigenbaum*, estos árboles tienen una *raíz recta*, una “*rama tierna*”, y *ramas periódicas* entrelazadas con el *polvo del caos*.
- Estas últimas son pues simbólicas “*hojas de la higuera*”. (!)

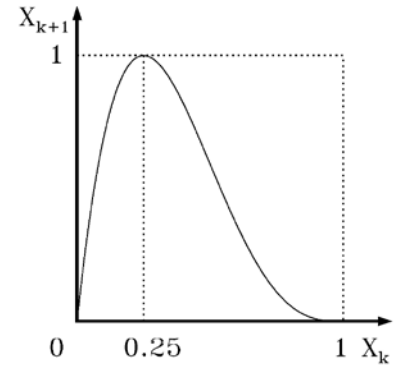
El diagrama de las bifurcaciones

- Los resultados son ciertamente importantes, pues además son relevantes en *física*, *química*, *biología*, *economía*, etc.

$$f(X) = \alpha X(1 - X^3)$$



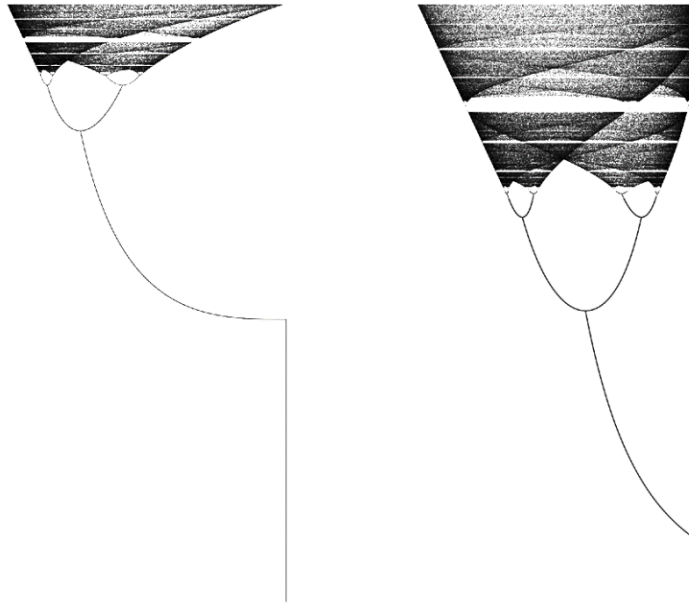
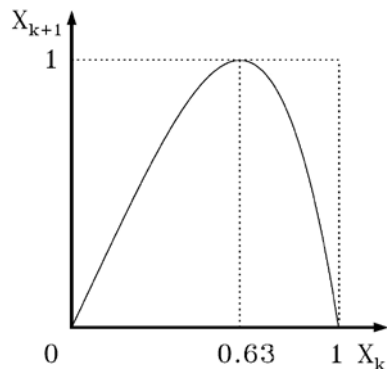
$$f(X) = \alpha X(1 - X)^3$$



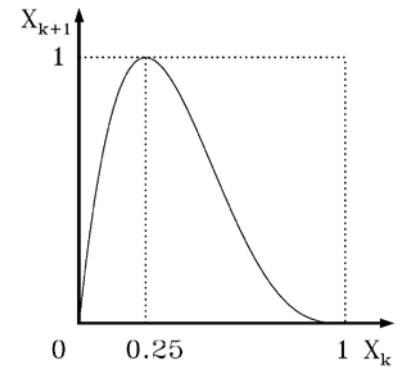
El diagrama de las bifurcaciones

- Los resultados son ciertamente importantes, pues además son relevantes en *física, química, biología, economía*, etc.

$$f(X) = \alpha X(1 - X^3)$$



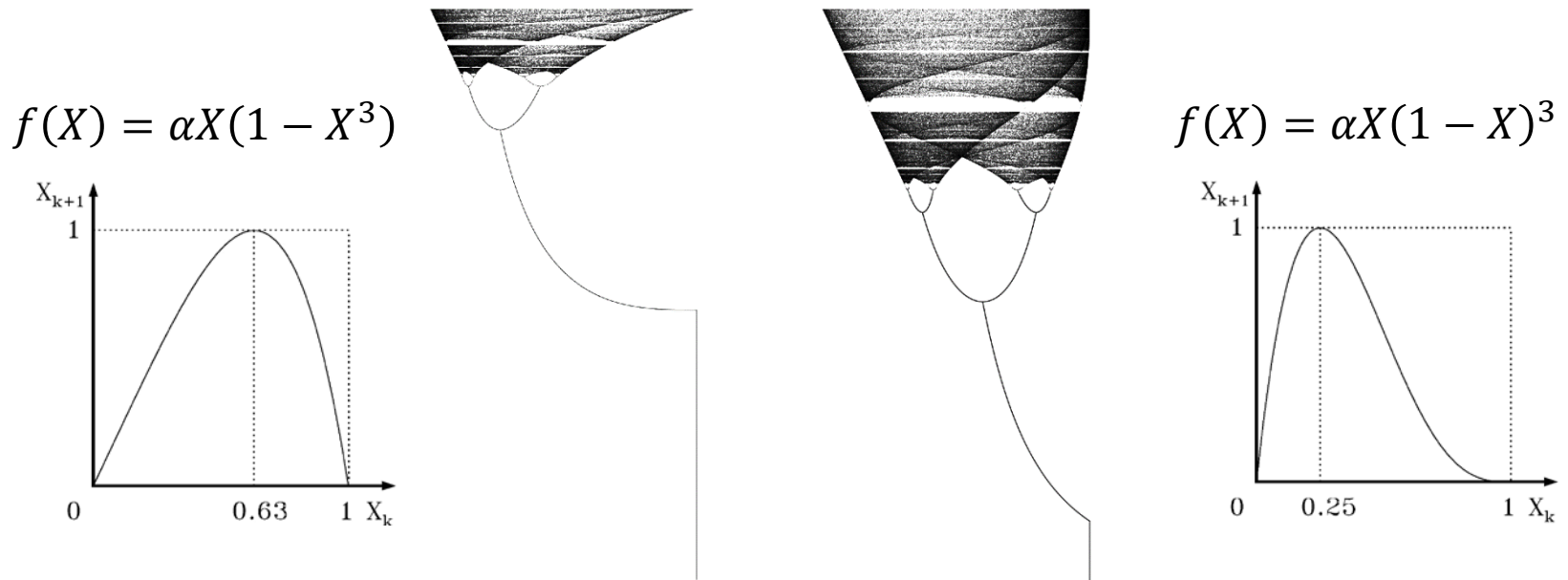
$$f(X) = \alpha X(1 - X)^3$$



- La dinámica de la **convección** ocurre a la *Feigenbaum* si α denota el **calor** agregado a un fluido. (!)

El diagrama de las bifurcaciones

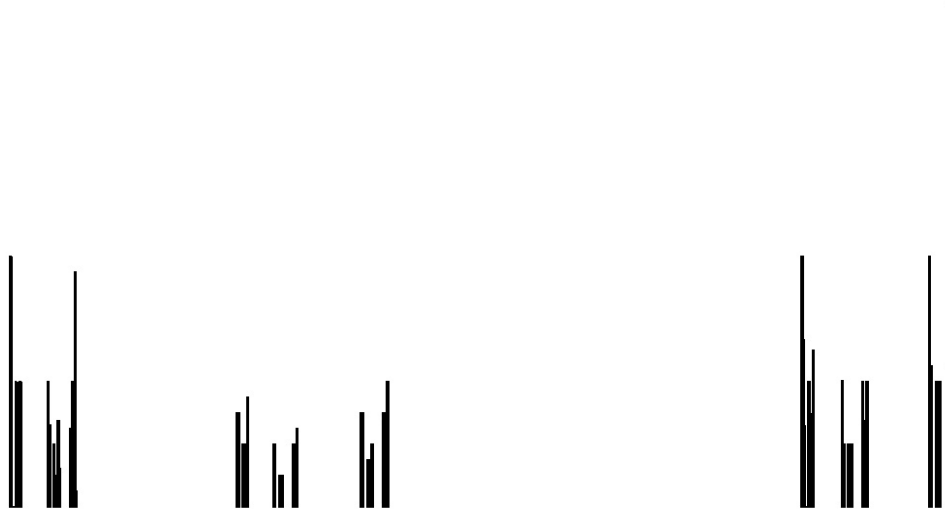
- Los resultados son ciertamente importantes, pues además son relevantes en *física, química, biología, economía*, etc.



- La dinámica de la **convección** ocurre a la Feigenbaum si α denota el **calor** agregado a un fluido. (!)
- Esto es así para el **helio líquido**, el **mercurio** y el **agua**, como lo hallaron primeramente *Jens Maurer* y *Albert Libchaber* en 1979.

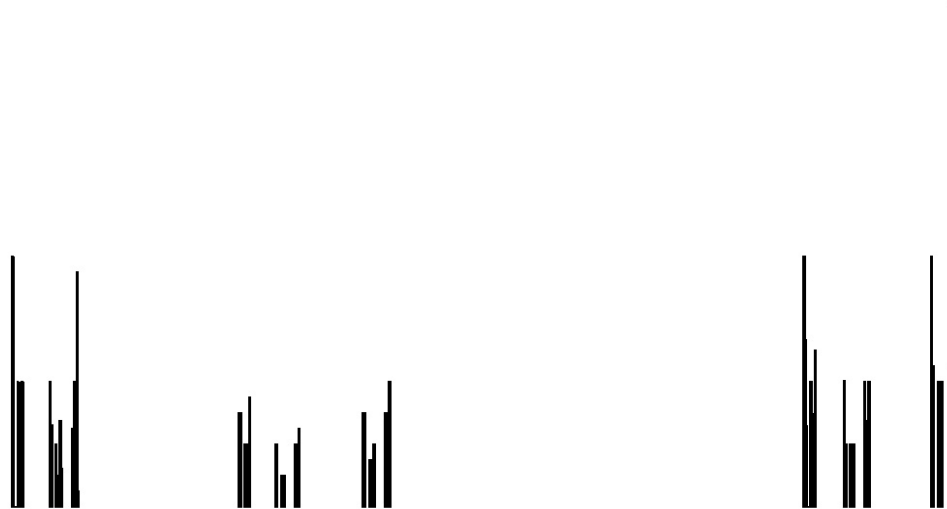
El diagrama de las bifurcaciones

- El árbol caótico contiene conjuntos de **espigas multi-fractales** que combinan **desequilibrios** y **huecos** como en juegos anteriores relacionados con el estudio de la **turbulencia**. El primero sucede para el valor de α_∞ :



El diagrama de las bifurcaciones

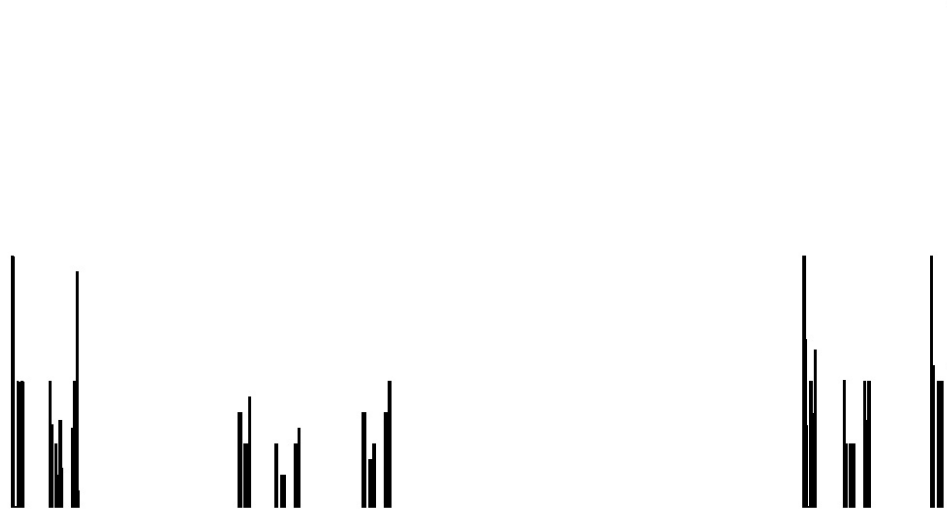
- El árbol caótico contiene conjuntos de *espinas multi-fractales* que combinan *desequilibrios* y *huecos* como en juegos anteriores relacionados con el estudio de la *turbulencia*. El primero sucede para el valor de α_∞ :



- Estas provienen de un *histograma* de la dinámica en dicho valor.

El diagrama de las bifurcaciones

- El árbol caótico contiene conjuntos de *espinas multi-fractales* que combinan *desequilibrios* y *huecos* como en juegos anteriores relacionados con el estudio de la *turbulencia*. El primero sucede para el valor de α_∞ :



- Estas provienen de un *histograma* de la dinámica en dicho valor.
- El árbol es un *espino*, pues hay *púas* al final de todas las bandas blancas del árbol, donde los brotes definen *polvos* de Cantor. (!)

Propiedades del caos

(Moon, 1987; Peitgen et al., 1992)

La geometría de lo extraño

(Peitgen et al., 1992)

- La dinámica no repetitiva caótica surge de “amasar” los estados posibles, *estirando* y *doblando* la masa:



La geometría de lo extraño

- La dinámica no repetitiva caótica surge de “amasar” los estados posibles, *estirando* y *doblando* la masa:



- Lo cercano se *separa* y luego se *acerca*, pero sin repetirse jamás.

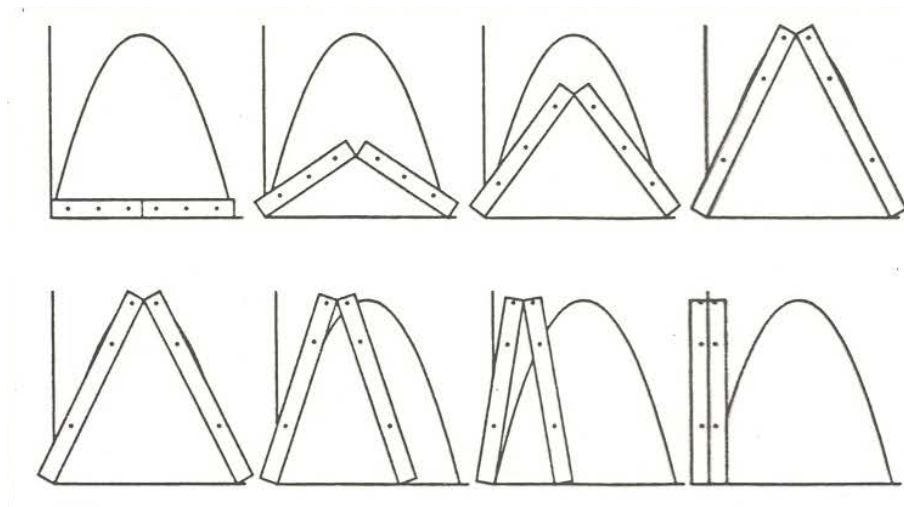
La geometría de lo extraño

(Peitgen et al., 1992)

- La dinámica no repetitiva caótica surge de “amasar” los estados posibles, *estirando* y *doblando* la masa:



- Lo cercano se *separa* y luego se *acerca*, pero sin repetirse jamás.
- Para el mapa logístico cuando $\alpha = 4$ los dos pasos son:



estirar

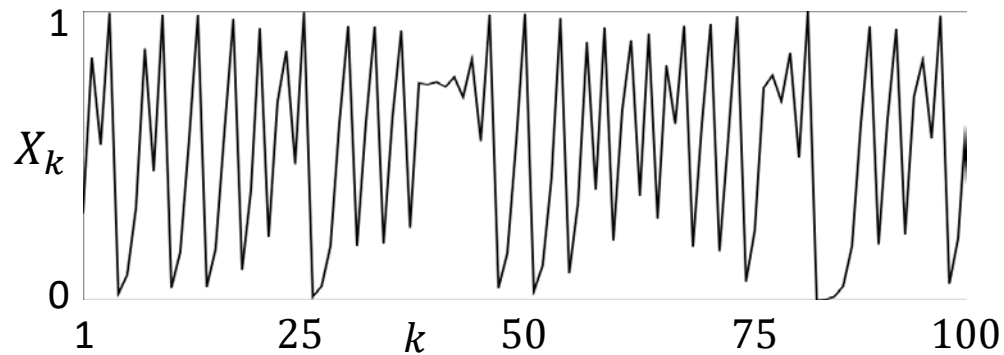
doblar

Sensibilidad a X_0

- La dinámica caótica es *sensible* a dónde empieza el proceso.

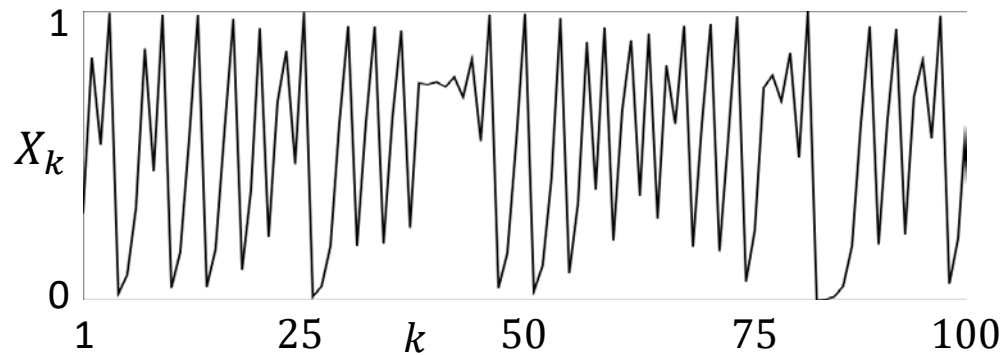
Sensibilidad a X_0

- La dinámica caótica es *sensible* a dónde empieza el proceso.
- Mientras que la órbita correspondiente a $X_0 = 0.3$ y $\alpha = 4$ es:

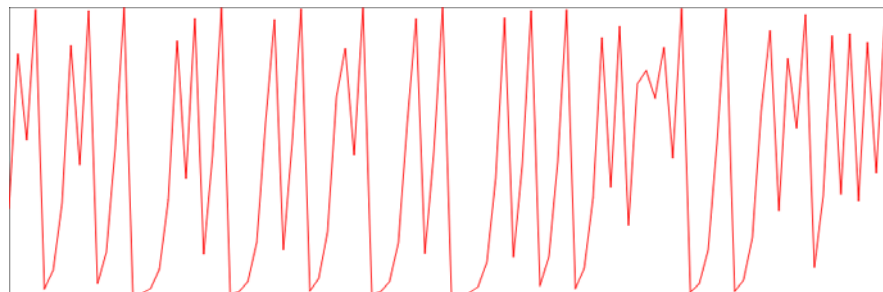


Sensibilidad a X_0

- La dinámica caótica es *sensible* a dónde empieza el proceso.
- Mientras que la órbita correspondiente a $X_0 = 0.3$ y $\alpha = 4$ es:

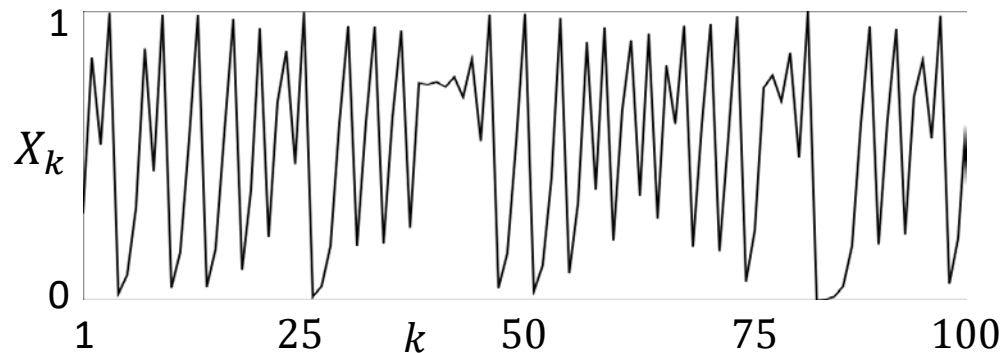


si se empieza en 0.3001 resulta:

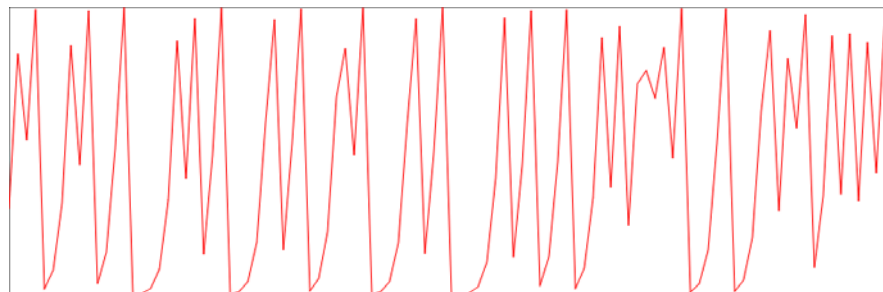


Sensibilidad a X_0

- La dinámica caótica es *sensible* a dónde empieza el proceso.
- Mientras que la órbita correspondiente a $X_0 = 0.3$ y $\alpha = 4$ es:



si se empieza en 0.3001 resulta:



- Este es “*el efecto mariposa*”, una *divergencia* que impide predecir.

El exponente de Lyapunov

- Mientras que la dinámica caótica *diverge*, la periódica *converge*.

El exponente de Lyapunov

- Mientras que la dinámica caótica *diverge*, la periódica *converge*.
- Esto se puede cuantificar estudiando la evolución de errores sucesivos, usando el **exponente de Lyapunov**, λ , ya sea éste positivo si diverge o no:

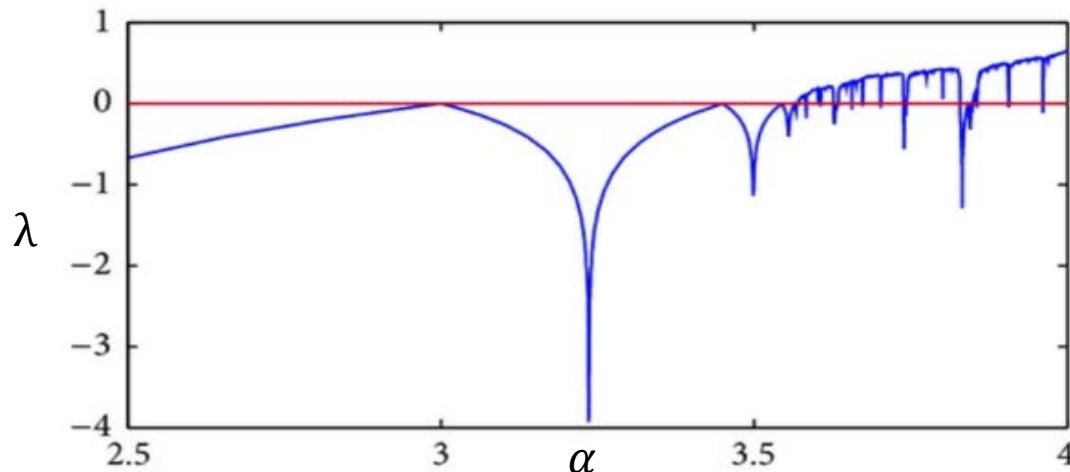
$$\epsilon(n) = 2^{\lambda n} \epsilon(0)$$

El exponente de Lyapunov

- Mientras que la dinámica caótica *diverge*, la periódica *converge*.
- Esto se puede cuantificar estudiando la evolución de errores sucesivos, usando el *exponente de Lyapunov*, λ , ya sea éste positivo si diverge o no:

$$\epsilon(n) = 2^{\lambda n} \epsilon(0)$$

- Para el mapa logístico esto da:

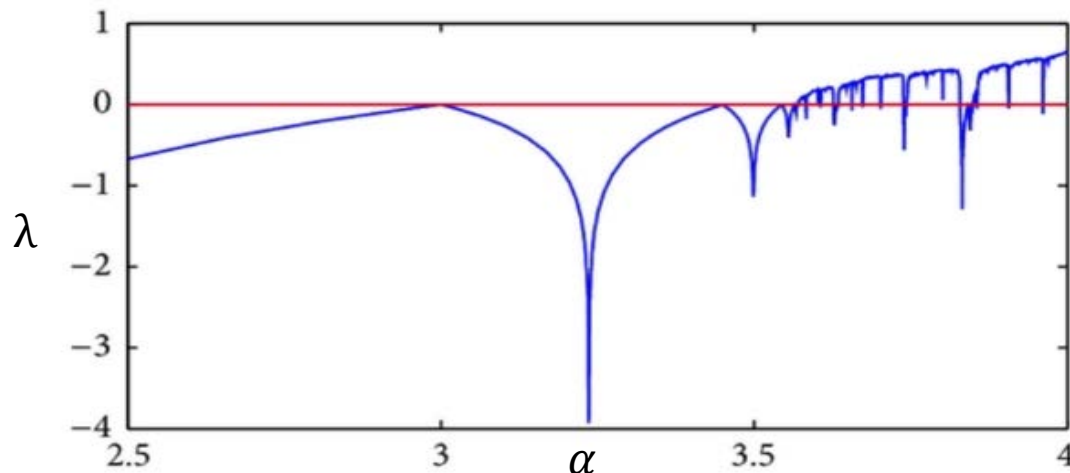


El exponente de Lyapunov

- Mientras que la dinámica caótica *diverge*, la periódica *converge*.
- Esto se puede cuantificar estudiando la evolución de errores sucesivos, usando el *exponente de Lyapunov*, λ , ya sea éste positivo si diverge o no:

$$\epsilon(n) = 2^{\lambda n} \epsilon(0)$$

- Para el mapa logístico esto da:



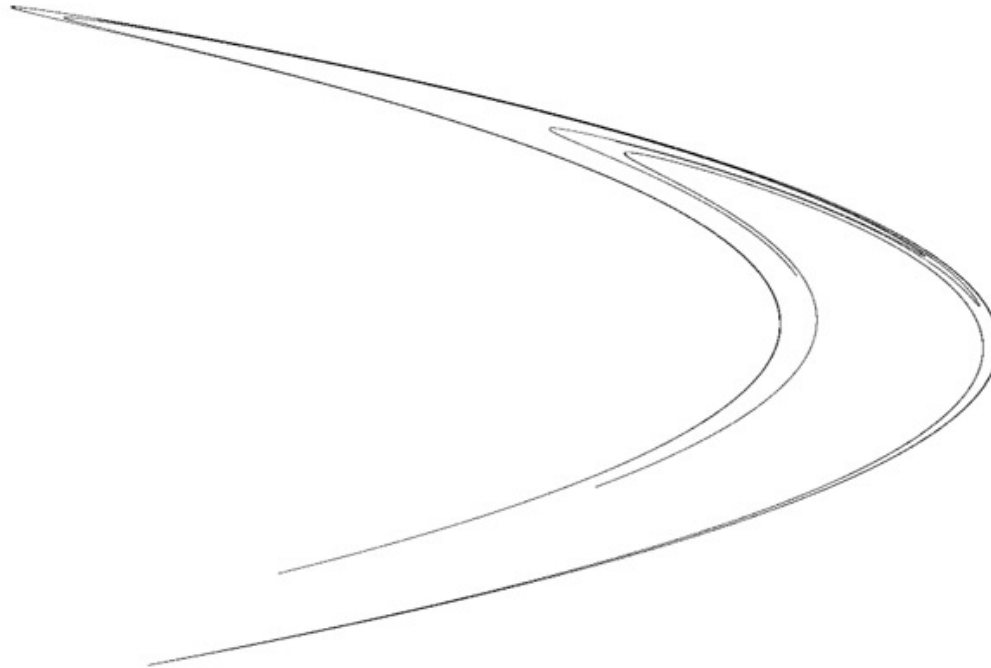
- El valor máximo, $\lambda = \ln 2$, sucede al mayor *calor* cuando $\alpha = 4$.

Atrayentes en 2D y 3D

(Lorenz, 1983; Moon, 1987)

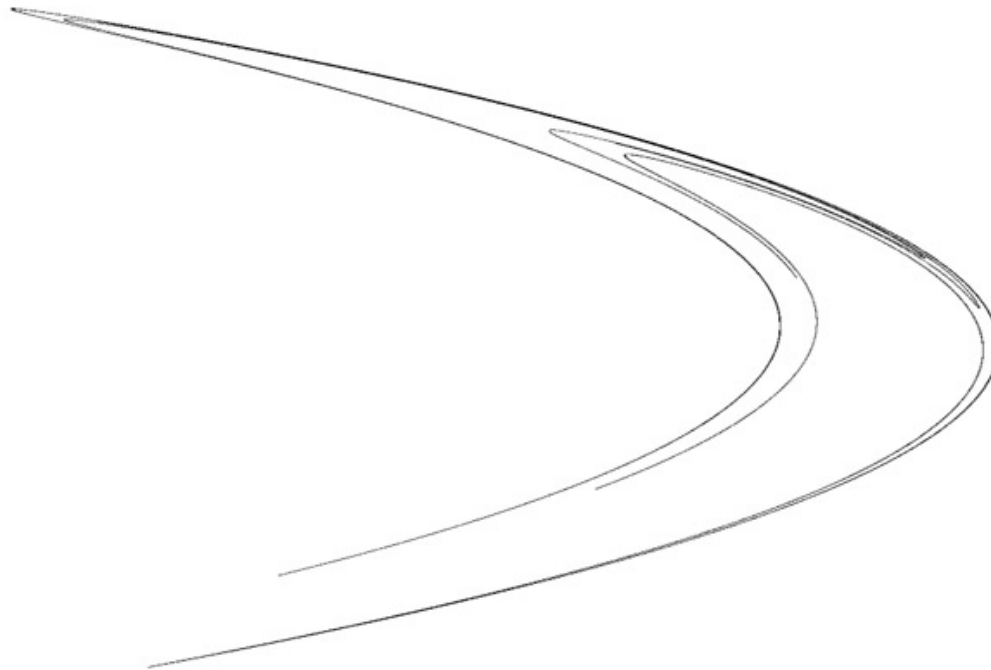
El atrayente de Hénon

- Si se emplean las ecuaciones acopladas $x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k$ y $y_{k+1} = b x_k$ con $a = 1.4$ y $b = 0.3$, aparece un atrayente extraño:



El atrayente de Hénon

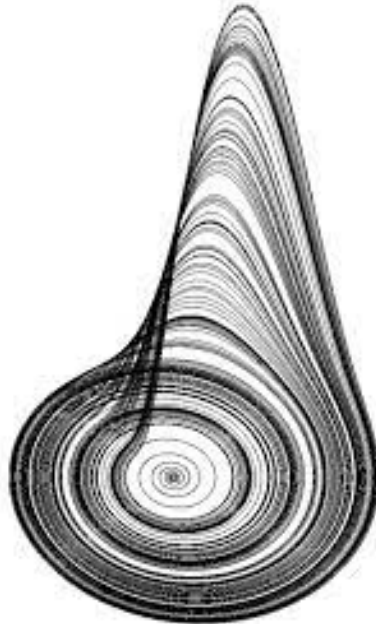
- Si se emplean las ecuaciones acopladas $x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k$ y $y_{k+1} = b x_k$ con $a = 1.4$ y $b = 0.3$, aparece un atrayente extraño:



- Luce como una **tarta milhojas** con estructura **cantoriana** y tiene una dimensión fractal igual a 1.26. (!)

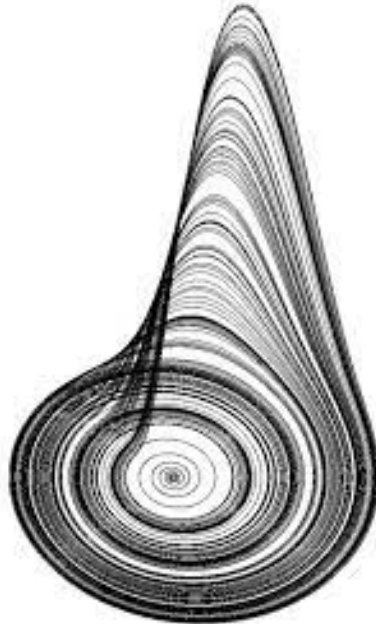
El atrayente de Rössler

- Si se emplean ahora tres ecuaciones acopladas, pero no de diferencias sino diferenciales, $\dot{x} = -y - z$, $\dot{y} = x + ay$ y $\dot{z} = b + z(x - c)$ con parámetros iguales a $a = 0.2$, $b = 0.2$ y $c = 5.7$, aparece un atrayente extraño en 3D:



El atrayente de Rössler

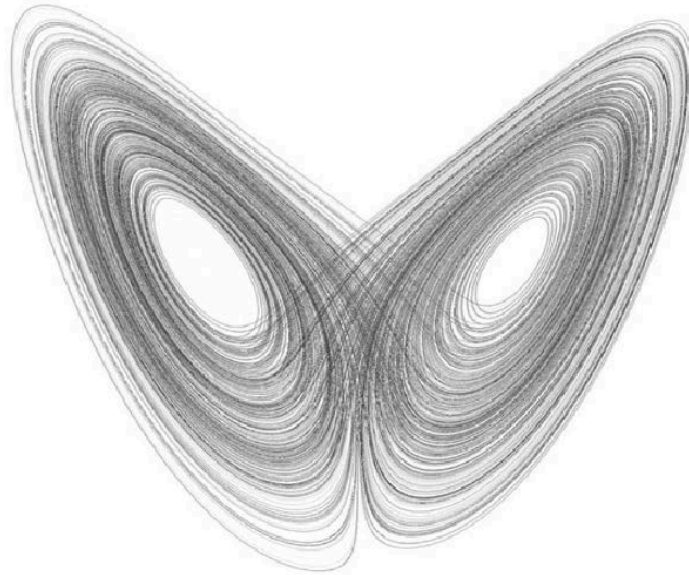
- Si se emplean ahora tres ecuaciones acopladas, pero no de diferencias sino diferenciales, $\dot{x} = -y - z$, $\dot{y} = x + ay$ y $\dot{z} = b + z(x - c)$ con parámetros iguales a $a = 0.2$, $b = 0.2$ y $c = 5.7$, aparece un atrayente extraño en 3D:



- El objeto *cantoriano* tiene la estructura de una *cinta de Möbius*.

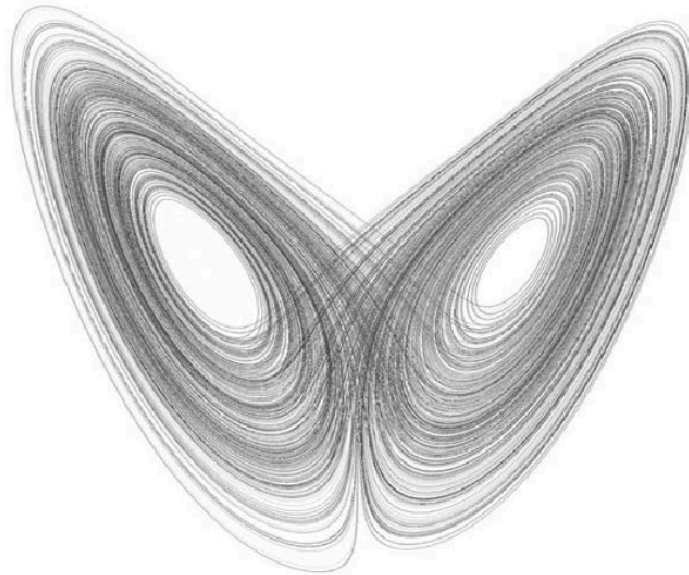
El atrayente de Lorenz

- Las tres ecuaciones, $\dot{x} = \sigma(y - z)$, $\dot{y} = x(\rho - z) - y$ y $\dot{z} = xy - \beta z$ con parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$ generan:



El atrayente de Lorenz

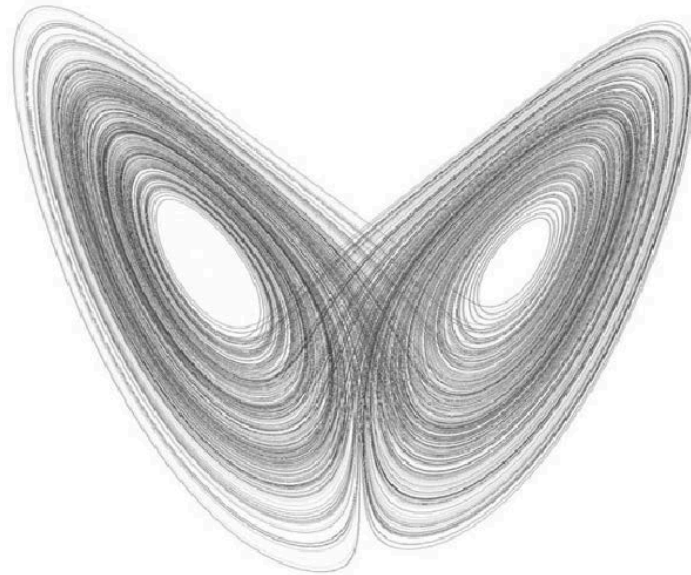
- Las tres ecuaciones, $\dot{x} = \sigma(y - z)$, $\dot{y} = x(\rho - z) - y$ y $\dot{z} = xy - \beta z$ con parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$ generan:



- Este objeto luce como una “mariposa” y su dimensión es 2.06. (!)

El atrayente de Lorenz

- Las tres ecuaciones, $\dot{x} = \sigma(y - z)$, $\dot{y} = x(\rho - z) - y$ y $\dot{z} = xy - \beta z$ con parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$ generan:



- Este objeto luce como una “mariposa” y su dimensión es 2.06. (!)
- Las ecuaciones, usadas por *Edward Lorenz* para estudiar el clima, permitieron identificar, por primera vez en 1963, el **efecto mariposa** de los atractores extraños aperiódicos y deterministas.

...Bueno, aquí termina esta breve introducción.

En la siguiente oportunidad veremos cómo a partir de estas ideas se puede entender que Jesús es la puerta estrecha y el único camino al Padre.

Hasta la próxima...

Referencias

- Feigenbaum, M. J. (1978) "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations", *Journal of Statistical Physics* 19(1):25.
- Gleick, J. (1987) *Chaos. Making a new science*, Penguin Books.
- Lorenz, E. N. (1963) "Deterministic nonperiodic flow", *Journal of Atmospheric Sciences* 20:130
- Lorenz, E. N. (1983) *The Essence of Chaos*, University of Washington Press.
- Maurer, J. y A. Libchaber (1979) "Rayleigh-Bénard experiment in liquid helium frequency locking and the onset of turbulence", *Journal de Physique Lettres* 40: L419.
- May, R. M. (1976) "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature* 261:459.
- Moon, F. C. (1987) *Chaotic Vibrations*, John Wiley & Sons.
- Peitgen, H. -O., H. Jürgens y D. Saupe, (1992) *Chaos and Fractals*, Springer-Verlag.
- Puente, C. E. (2014) *La Higuera & La Campana: Caos, Complejidad y Cristiandad*. Santito Press.
- Puente, C. E. (2019) <https://campanitasdefe.com/2019/02/16/hablemos-de-caos/>
- Schroeder, M. (1992) *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*, W. H. Freeman.
- Turcotte, D. (1997) *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press.