Caos, Complejidad & Cristiandad

2. Una introducción a los fractales y la complejidad

Carlos E. Puente

Universidad de California, Davis

Resumen

- *Recuerda los diferentes tipos de números: naturales, enteros, racionales y reales.*
- *Repasa el concepto de la dimensión para puntos, líneas, planos y volúmenes.*
- *Muestra ejemplos de objetos fractales, incluyendo el polvo de Cantor, la curva de Koch y el triángulo de Sierpinski.*
- *Contrasta el orden y el caos por medio del mapa logístico.*
- *Introduce leyes de potencia relacionadas con la complejidad natural.*

Hablemos de números

Los naturales y los enteros

- El primer conjunto que aprendemos son los números **naturales**:

$$1, 2, 3, \ldots$$

Los naturales y los enteros

- El primer conjunto que aprendemos son los números **naturales**:

$$1, 2, 3, \ldots$$

- Este conjunto es ***infinito***, y sabemos que significa “punto, punto, punto”.

Los naturales y los enteros

- El primer conjunto que aprendemos son los números **naturales**:

1, 2, 3, …

- Este conjunto es ***infinito***, y sabemos que significa "punto, punto, punto".

- Luego vienen los **enteros**: los naturales, el cero y los negativos:

… -2, -1, 0, 1, 2, …

Los naturales y los enteros

- El primer conjunto que aprendemos son los números **naturales**:

1, 2, 3, …

- Este conjunto es ***infinito***, y sabemos que significa “punto, punto, punto”.

- Luego vienen los **enteros**: los naturales, el cero y los negativos:

… -2, -1, 0, 1, 2, …

- Este conjunto también es ***infinito***, pero no más grande que los naturales: 0 es el ***primero***, 1 el ***segundo***, -1 el ***tercero***, 2 el ***cuarto***, -2 el ***quinto***, etc.

Los naturales y los enteros

- El primer conjunto que aprendemos son los números **naturales**:

$$1, 2, 3, \ldots$$

- Este conjunto es ***infinito***, y sabemos que significa "punto, punto, punto".

- Luego vienen los **enteros**: los naturales, el cero y los negativos:

$$\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

- Este conjunto también es ***infinito***, pero no más grande que los naturales: 0 es el ***primero***, 1 el ***segundo***, -1 el ***tercero***, 2 el ***cuarto***, -2 el ***quinto***, etc.

- El **infinito** es un concepto peculiar, pues hemos probado que

$$2 \cdot \infty + 1 = \infty \quad \textbf{(!)}$$

Los racionales

- El siguiente conjunto que aprendemos son los **racionales**, las ***fracciones***, o ***quebrados***, cocientes de enteros, denotados por p/q.

Los racionales

- El siguiente conjunto que aprendemos son los **racionales**, las ***fracciones***, o ***quebrados***, cocientes de enteros, denotados por p/q.

- Algunos ejemplos de estos números son:

$$1/2 = 0.5000\ldots$$

$$2/3 = 0.6666\ldots$$

$$1/11 = 0.090909\ldots$$

Los racionales

- El siguiente conjunto que aprendemos son los **racionales**, las ***fracciones***, o ***quebrados***, cocientes de enteros, denotados por p/q.

- Algunos ejemplos de estos números son:

$$1/2 = 0.5000\ldots$$

$$2/3 = 0.6666\ldots$$

$$1/11 = 0.090909\ldots$$

- Las fracciones exhiben un patrón repetido, 0’s, 6’s y 09’s.

Los racionales

- El siguiente conjunto que aprendemos son los **racionales**, las ***fracciones***, o ***quebrados***, cocientes de enteros, denotados por p/q.

- Algunos ejemplos de estos números son:

$$1/2 = 0.5000\ldots$$

$$2/3 = 0.6666\ldots$$

$$1/11 = 0.090909\ldots$$

- Las fracciones exhiben un patrón repetido, 0's, 6's y 09's.

- A veces tal *"**estado estable**"* aparece inmediatamente, como en 2/3 y 1/11, o aparece luego de un *"**estado transitorio**" finito,* como sucede con 1/2.

Los racionales

- Los dígitos de un número racional p/q son ***predecibles***: al estado transitorio ***finito*** le sigue la repetición del estado estable también ***finito***.

Los racionales

- Los dígitos de un número racional p/q son ***predecibles***: al estado transitorio ***finito*** le sigue la repetición del estado estable también ***finito***.

- Así, aunque las expansiones son ***infinitas***, podemos "racionalizar" lo que significa "punto, punto, punto".

Los racionales

- Los dígitos de un número racional p/q son ***predecibles***: al estado transitorio ***finito*** le sigue la repetición del estado estable también ***finito***.

- Así, aunque las expansiones son ***infinitas***, podemos "racionalizar" lo que significa "punto, punto, punto".

- Hay tantas fracciones como números naturales:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 \cdots \\
 & \swarrow & & & & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Los racionales

- Los dígitos de un número racional p/q son ***predecibles***: al estado transitorio ***finito*** le sigue la repetición del estado estable también ***finito***.

- Así, aunque las expansiones son ***infinitas***, podemos "racionalizar" lo que significa "punto, punto, punto".

- Hay tantas fracciones como números naturales:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

- El **infinito** tiene, en verdad, sus propias reglas: $\infty \cdot \infty = \infty$ **(!)**

Los irracionales

- Muchos números no son fracciones pues sus expansiones no exhiben repetición sino ***estados transitorios infinitos***.

Los irracionales

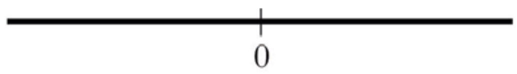
- Muchos números no son fracciones pues sus expansiones no exhiben repetición sino ***estados transitorios infinitos***.

- Estos **irracionales** y los ***racionales*** conforman los números **reales**:

Los irracionales

- Muchos números no son fracciones pues sus expansiones no exhiben repetición sino ***estados transitorios infinitos***.

- Estos **irracionales** y los ***racionales*** conforman los números **reales**:

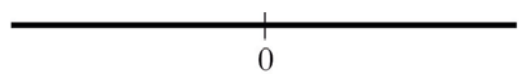


- Estos no se pueden ***contar*** y pertenecen a un ***infinito mayor***. **(!)**

Los irracionales

- Muchos números no son fracciones pues sus expansiones no exhiben repetición sino ***estados transitorios infinitos***.

- Estos **irracionales** y los ***racionales*** conforman los números **reales**:



- Estos no se pueden ***contar*** y pertenecen a un ***infinito mayor***. (!)

- Pues, si suponemos que existe una lista:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad 0.a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots \\
&2) \quad 0.b_1b_2b_3b_4b_5 \ldots \\
&\quad\quad \vdots \\
&\mathrm{n}) \quad 0.x_1x_2x_3x_4x_5 \ldots
\end{aligned}
$$

entonces $0.y_1y_2y_3y_4y_5 \ldots$ no está en la lista si

$y_1 \neq a_1, y_2 \neq b_2, \ldots, y_n \neq x_n$, etc., lo cual es una contradicción. **(!)**

Los irracionales

- Los siguientes son irracionales prominentes asociados con **cuadrados**, **círculos** y **espirales**:

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

$$e = 2.71828183\ldots$$

Los irracionales

- Los siguientes son irracionales prominentes asociados con **cuadrados**, **círculos** y **espirales**:

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

$$e = 2.71828183\ldots$$

- Como las expansiones no repiten, no podemos ***predecir*** el siguiente dígito.

Los irracionales

- Los siguientes son irracionales prominentes asociados con **cuadrados**, **círculos** y **espirales**:

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

$$e = 2.71828183\ldots$$

- Como las expansiones no repiten, no podemos ***predecir*** el siguiente dígito.

- Para estos números “punto, punto, punto” es un **misterio**.

Los irracionales

- Los siguientes son irracionales prominentes asociados con **cuadrados**, **círculos** y **espirales**:

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

$$e = 2.71828183\ldots$$

- Como las expansiones no repiten, no podemos ***predecir*** el siguiente dígito.

- Para estos números "punto, punto, punto" es un **misterio**.

- En efecto, los dígitos de éstos suceden como "***guiados por el azar***".

Los irracionales

- Los siguientes son irracionales prominentes asociados con **cuadrados**, **círculos** y **espirales**:

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

$$e = 2.71828183\ldots$$

- Como las expansiones no repiten, no podemos ***predecir*** el siguiente dígito.

- Para estos números "punto, punto, punto" es un **misterio**.

- En efecto, los dígitos de éstos suceden como *"**guiados por el azar**"*.

- El entender plenamente los irracionales no es posible a menos que tengan una propiedad que los defina, como los famosos números arriba.

El concepto de la dimensión

(Mandelbrot, 1982)

El concepto de la dimensión

- Sabemos que ***un punto no tiene dimensión***, ***un segmento de línea recta es unidimensional***, ***el plano es bidimensional*** y ***vivimos en tres dimensiones***.

El concepto de la dimensión

- Sabemos que ***un punto no tiene dimensión***, ***un segmento de línea recta es unidimensional***, ***el plano es bidimensional*** y ***vivimos en tres dimensiones***.

- Esto se puede verificar contando "***cajas***" necesarias para cubrir un objeto.

El concepto de la dimensión

- Sabemos que ***un punto no tiene dimensión***, ***un segmento de línea recta es unidimensional***, ***el plano es bidimensional*** y ***vivimos en tres dimensiones***.

- Esto se puede verificar contando "***cajas***" necesarias para cubrir un objeto.

- Considere, por ejemplo, ***intervalos*** de tamaño δ y pregunte cuántos, $N(\delta)$, se requieren para cubrir un segmento de ***línea recta*** de tamaño 1.

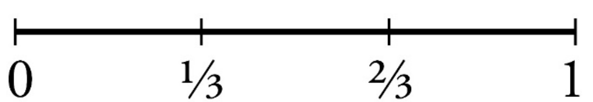
El concepto de la dimensión

• Sabemos que ***un punto no tiene dimensión***, ***un segmento de línea recta es unidimensional***, ***el plano es bidimensional*** y ***vivimos en tres dimensiones***.

• Esto se puede verificar contando "***cajas***" necesarias para cubrir un objeto.

• Considere, por ejemplo, ***intervalos*** de tamaño δ y pregunte cuántos, $\mathrm{N}(\delta)$, se requieren para cubrir un segmento de ***línea recta*** de tamaño 1.

• Si δ es igual a 1, solo uno es suficiente, $\mathrm{N}(1) = 1$, pero si $\delta = 1/3$, se requieren tres tales intervalos cerrados o $\mathrm{N}(1/3) = 3$:



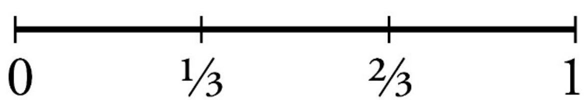
El concepto de la dimensión

• Sabemos que ***un punto no tiene dimensión***, ***un segmento de línea recta es unidimensional***, ***el plano es bidimensional*** y ***vivimos en tres dimensiones***.

• Esto se puede verificar contando "***cajas***" necesarias para cubrir un objeto.

• Considere, por ejemplo, ***intervalos*** de tamaño δ y pregunte cuántos, $\mathrm{N}(\delta)$, se requieren para cubrir un segmento de ***línea recta*** de tamaño 1.

• Si δ es igual a 1, solo uno es suficiente, $\mathrm{N}(1) = 1$, pero si $\delta = 1/3$, se requieren tres tales intervalos cerrados o $\mathrm{N}(1/3) = 3$:



• Si $\delta = 1/\mathrm{n}$, $\mathrm{N}(\delta) = \mathrm{n}$, y entonces $\mathrm{N}(\delta) = \delta^{-1}$, lo cual define la **dimensión** de la ***línea recta*** como el negativo del exponente, o sea $\mathrm{D} = 1$. **(!)**

El concepto de la dimensión

- Las ideas funcionan para un ***punto***, pues solo una caja de cualquier tamaño δ se requiere para cubrirlo: $\mathrm{N}(\delta) = 1 = \delta^{-0}$, o sea $\mathrm{D} = 0$. **(!)**

El concepto de la dimensión

- Las ideas funcionan para un ***punto***, pues solo una caja de cualquier tamaño δ se requiere para cubrirlo: $\mathrm{N}(\delta) = 1 = \delta^{-0}$, o sea $\mathrm{D} = 0$. (!)

- Para un número ***finito*** de ***puntos***, digamos m de ellos, la dimensión es también **cero**, pues para δ's suficientemente pequeños, $\mathrm{N}(\delta) = \mathrm{m} \cdot \delta^{-0}$, y el ***exponente*** sigue siendo igual a **cero**. **(!)**

El concepto de la dimensión

• Las ideas funcionan para un ***punto***, pues solo una caja de cualquier tamaño δ se requiere para cubrirlo: $N(\delta) = 1 = \delta^{-0}$, o sea $D = 0$. (!)

• Para un número ***finito*** de ***puntos***, digamos m de ellos, la dimensión es también **cero**, pues para δ's suficientemente pequeños, $N(\delta) = m \cdot \delta^{-0}$, y el ***exponente*** sigue siendo igual a **cero**. (!)

• Para el ***plano*** y un ***volumen*** es similar, pero en vez de emplear intervalos se deben usar cuadrados y cubos con ***lados*** δ.

El concepto de la dimensión

- Las ideas funcionan para un ***punto***, pues solo una caja de cualquier tamaño δ se requiere para cubrirlo: $N(\delta) = 1 = \delta^{-0}$, o sea $D = 0$. (!)

- Para un número ***finito*** de ***puntos***, digamos m de ellos, la dimensión es también **cero**, pues para δ's suficientemente pequeños, $N(\delta) = m \cdot \delta^{-0}$, y el ***exponente*** sigue siendo igual a **cero**. (!)

- Para el ***plano*** y un ***volumen*** es similar, pero en vez de emplear intervalos se deben usar cuadrados y cubos con ***lados*** δ.

- Para el ***plano*** se obtiene $N(\delta) = \delta^{-2}$, o $D = 2$, pues, el reducir δ en un factor de dos, aumenta el número de cuadrados en un factor de cuatro, como se observa en pisos con baldosas cuadradas.

El concepto de la dimensión

- Las ideas funcionan para un ***punto***, pues solo una caja de cualquier tamaño δ se requiere para cubrirlo: $\mathrm{N}(\delta) = 1 = \delta^{-0}$, o sea $\mathrm{D} = 0$. (!)

- Para un número ***finito*** de ***puntos***, digamos m de ellos, la dimensión es también **cero**, pues para δ's suficientemente pequeños, $\mathrm{N}(\delta) = \mathrm{m} \cdot \delta^{-0}$, y el ***exponente*** sigue siendo igual a **cero**. (!)

- Para el ***plano*** y un ***volumen*** es similar, pero en vez de emplear intervalos se deben usar cuadrados y cubos con ***lados*** δ.

- Para el ***plano*** se obtiene $\mathrm{N}(\delta) = \delta^{-2}$, o $\mathrm{D} = 2$, pues, el reducir δ en un factor de dos, aumenta el número de cuadrados en un factor de cuatro, como se observa en pisos con baldosas cuadradas.

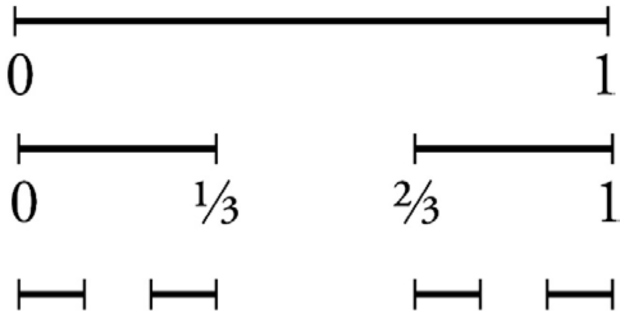
- Como el ***plano*** contiene ***infinitas líneas*** y ***puntos***, $\infty \cdot 1 = 2$ e $\infty \cdot 0 = 2$. **(!)**

Algunos conjuntos fractales

(Mandelbrot, 1982; Barnsley, 1988; Feder, 1988)

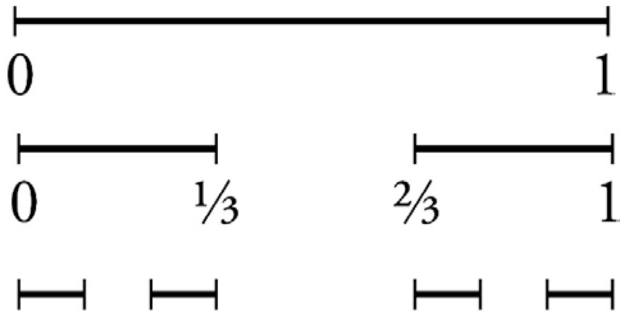
El conjunto de Cantor

- Considere lo que queda al quitar ***intervalos abiertos sucesivos de un tercio y por el medio*** a partir de un intervalo de tamaño 1:



El conjunto de Cantor

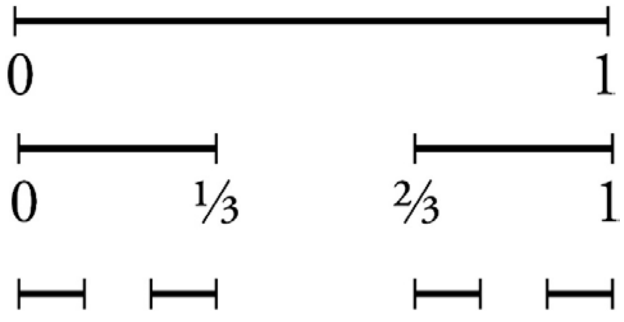
• Considere lo que queda al quitar ***intervalos abiertos sucesivos de un tercio y por el medio*** a partir de un intervalo de tamaño 1:



• Al aumentar la ***fragmentación***, emerge un número ***infinito*** e ***incontable*** de puntos dispersos: el **conjunto de Cantor**, compuesto por todos los reales entre 0 y 1 cuya expansión ternaria no contiene 1's sino 0's y 2's.

El conjunto de Cantor

- Considere lo que queda al quitar ***intervalos abiertos sucesivos de un tercio y por el medio*** a partir de un intervalo de tamaño 1:

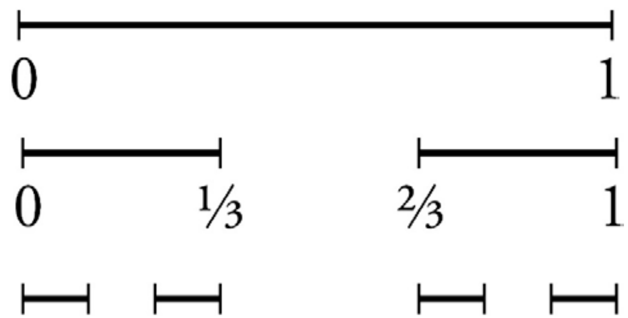


- Al aumentar la ***fragmentación***, emerge un número ***infinito*** e ***incontable*** de puntos dispersos: el **conjunto de Cantor**, compuesto por todos los reales entre 0 y 1 cuya expansión ternaria no contiene 1's sino 0's y 2's.

- Este conjunto es topológicamente "***nada***", pero ¿cuánto da $\infty \cdot 0$?

El conjunto de Cantor

• Considere lo que queda al quitar ***intervalos abiertos sucesivos de un tercio y por el medio*** a partir de un intervalo de tamaño 1:



• Al aumentar la ***fragmentación***, emerge un número ***infinito*** e ***incontable*** de puntos dispersos: el **conjunto de Cantor**, compuesto por todos los reales entre 0 y 1 cuya expansión ternaria no contiene 1's sino 0's y 2's.

• Este conjunto es topológicamente "***nada***", pero ¿cuánto da $\infty \cdot 0$?

• Como $\mathrm{N}(1/3) = 2$, $\mathrm{N}(1/9) = 4$; $\mathrm{D} = \ln 2/\ln 3 \approx 0.63$ y así $\infty \cdot 0 \approx 0.63$. **(!)**

El conjunto de Cantor

δ	$N(\delta)$
1	1
$1/3$	2
$1/9$	4
$\vdots$	$\vdots$
$1/3^n$	2^n

$$\delta = 1/3^n \Rightarrow \ln\delta = -n\ln 3$$

$$n = -\frac{\ln\delta}{\ln 3}$$

Then,
$$
\begin{aligned}
N(\delta) &= 2^n \\
&= 2^{-\frac{\ln\delta}{\ln 3}} \\
&= e^{-\frac{\ln\delta\ \ln 2}{\ln 3}} \\
&= \delta^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}} \\
&=
\end{aligned}
$$

El conjunto de Cantor

- Tal “**polvo**”, introducido por *George Cantor* en 1883, es un objeto **fractal**.

El conjunto de Cantor

- Tal "**polvo**", introducido por *George Cantor* en 1883, es un objeto **fractal**.

- Se pueden hallar otros **polvos** variando el tamaño del ***hueco***, e.g., si se quitan segmentos equidistantes de tamaño h%, la ***dimensión*** da:

$$\mathrm{D} = \ln 2/(\ln 2 - \ln(1-\mathrm{h}))$$

El conjunto de Cantor

- Tal “**polvo**”, introducido por *George Cantor* en 1883, es un objeto **fractal**.

- Se pueden hallar otros **polvos** variando el tamaño del ***hueco**,* e.g., si se quitan segmentos equidistantes de tamaño h%, la ***dimensión*** da:

$$D = \ln 2/(\ln 2 - \ln(1-h))$$

- Aquí, cuando $h = 0$, se obtiene el intervalo con $D = 1$, y si $h = 1$, $D = 0$.

El conjunto de Cantor

- Tal "**polvo**", introducido por *George Cantor* en 1883, es un objeto **fractal**.

- Se pueden hallar otros **polvos** variando el tamaño del ***hueco***, e.g., si se quitan segmentos equidistantes de tamaño h%, la ***dimensión*** da:

$$D = \ln 2/(\ln 2 - \ln(1-h))$$

- Aquí, cuando $h = 0$, se obtiene el intervalo con $D = 1$, y si $h = 1$, $D = 0$.

- Cuando h varía, D puede ser cualquier número entre 0 y 1. **(!)**

El conjunto de Cantor

- Tal "**polvo**", introducido por *George Cantor* en 1883, es un objeto **fractal**.

- Se pueden hallar otros **polvos** variando el tamaño del ***hueco***, e.g., si se quitan segmentos equidistantes de tamaño h%, la ***dimensión*** da:

$$D = \ln 2/(\ln 2 - \ln(1-h))$$

- Aquí, cuando $h = 0$, se obtiene el intervalo con $D = 1$, y si $h = 1$, $D = 0$.

- Cuando h varía, D puede ser cualquier número entre 0 y 1. (!)

- La dimensión refleja la cantidad de ***espacio cubierto*** por el conjunto: el ***polvo de Cantor*** original cubre aproximadamente el 63% de la línea.

El conjunto de Cantor

- Tal "**polvo**", introducido por *George Cantor* en 1883, es un objeto **fractal**.

- Se pueden hallar otros **polvos** variando el tamaño del ***hueco***, e.g., si se quitan segmentos equidistantes de tamaño h%, la ***dimensión*** da:

$$D = \ln 2/(\ln 2 - \ln(1-h))$$

- Aquí, cuando $h = 0$, se obtiene el intervalo con $D = 1$, y si $h = 1$, $D = 0$.

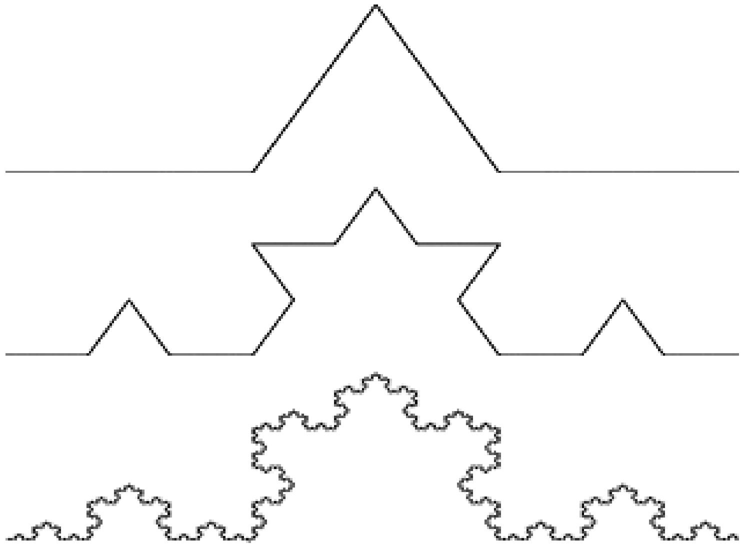
- Cuando h varía, D puede ser cualquier número entre 0 y 1. (!)

- La dimensión refleja la cantidad de ***espacio cubierto*** por el conjunto: el ***polvo de Cantor*** original cubre aproximadamente el 63% de la línea.

- Existen otros **fractales** definidos en dos y tres dimensiones.

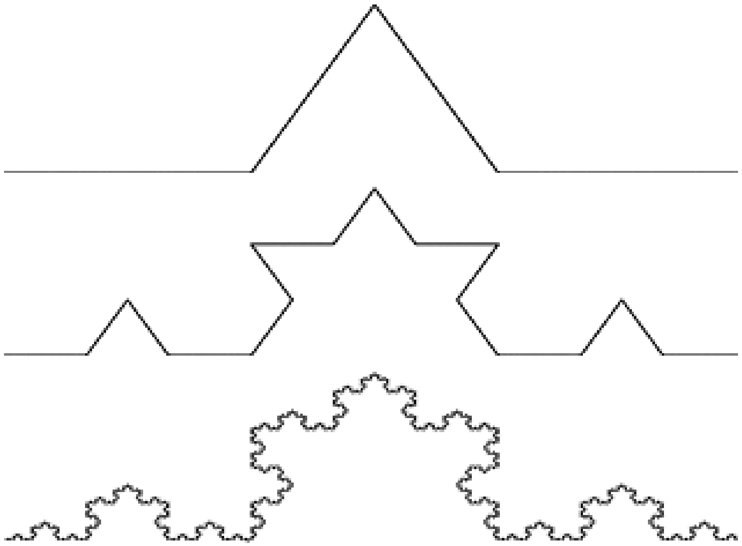
La curva de Koch

- Considere el conjunto hallado reemplazando cada segmento de línea por ***cuatro segmentos más pequeños de un tercio del tamaño y conformando por la mitad un triángulo equilátero***:



La curva de Koch

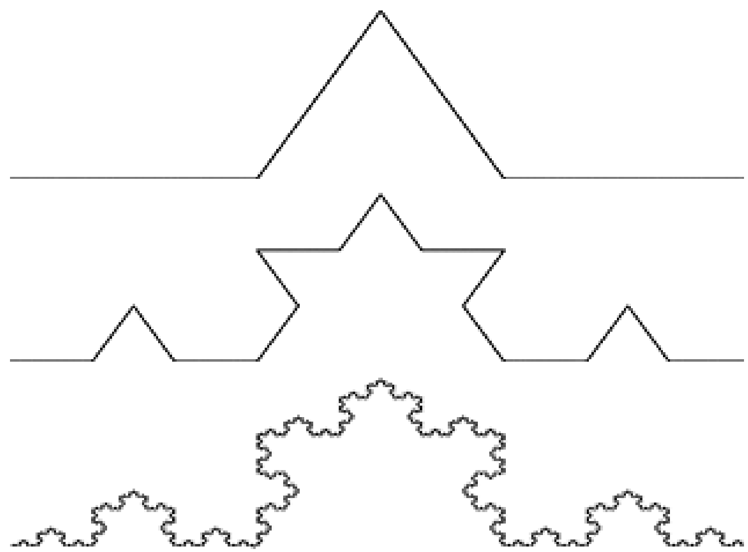
- Considere el conjunto hallado reemplazando cada segmento de línea por ***cuatro segmentos más pequeños de un tercio del tamaño y conformando por la mitad un triángulo equilátero***:



- Esta es la ***curva de Koch*** introducida en 1904, $\mathrm{D} = \ln 4/\ln 3 \approx 1.26$. **(!)**

La curva de Koch

• Considere el conjunto hallado reemplazando cada segmento de línea por ***cuatro segmentos más pequeños de un tercio del tamaño y conformando por la mitad un triángulo equilátero***:

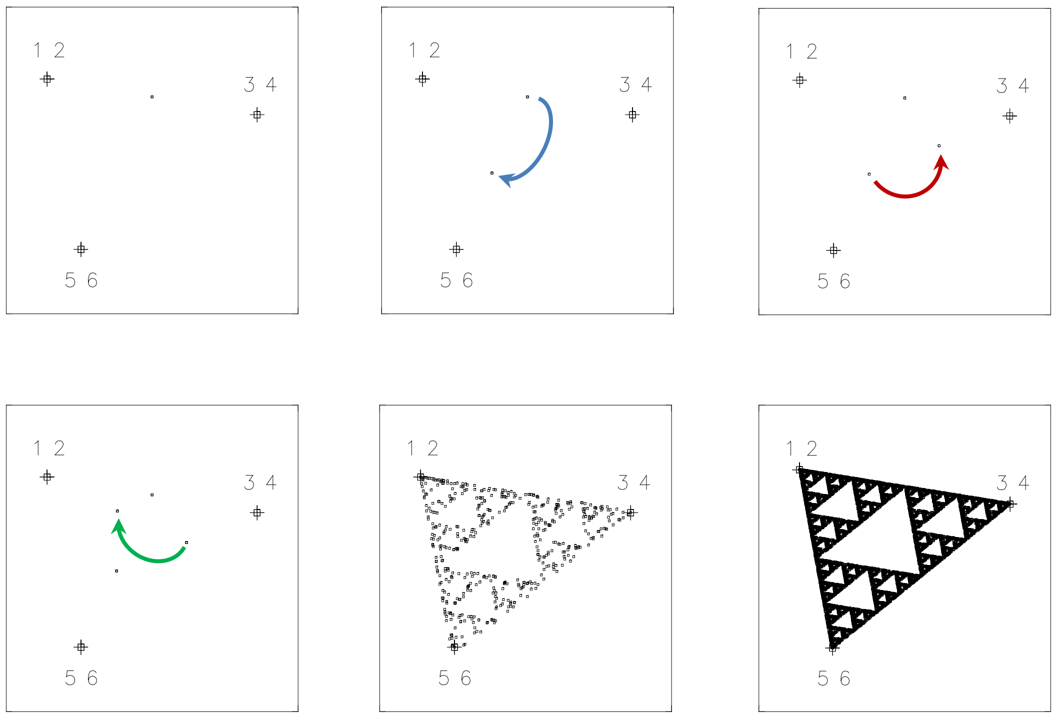


• Esta es la ***curva de Koch*** introducida en 1904, $\mathrm{D} = \ln 4/\ln 3 \sim 1.26.$ (!)

• Existen otros tales conjuntos con dimensiones entre 1 y 2 (inclusive).

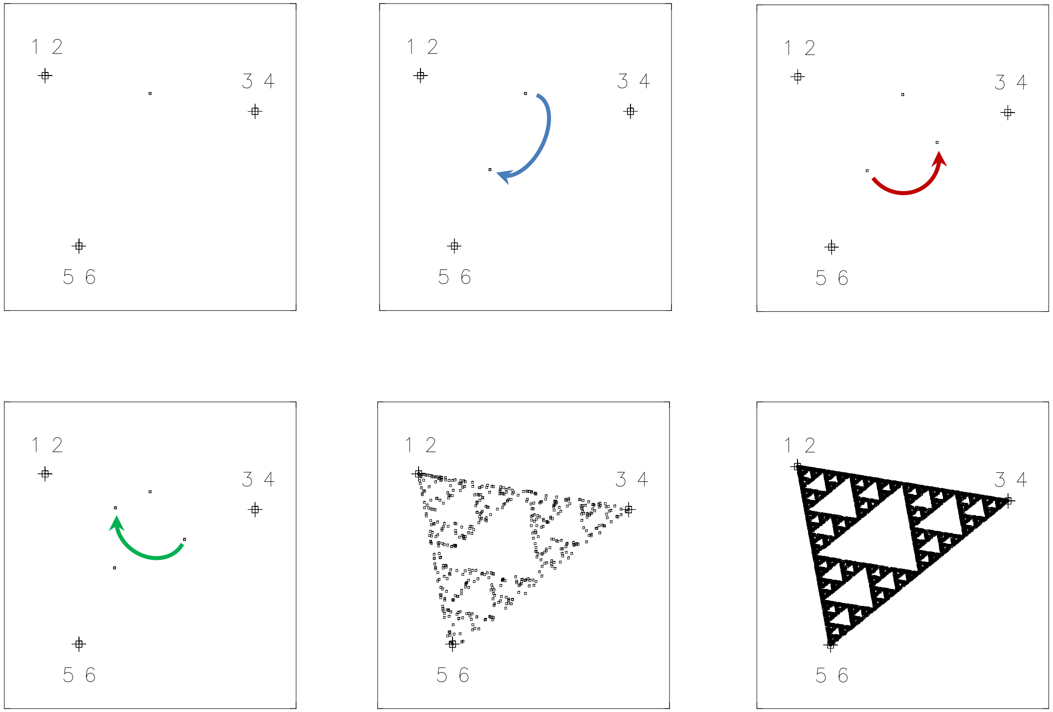
El triángulo de Sierpinski

- Obtenido ***punto a punto*** yendo hacia el medio de tres vértices o ***quitando triángulos centrales sucesivamente***, cual introducido en 1915:



El triángulo de Sierpinski

- Obtenido ***punto a punto*** yendo hacia el medio de tres vértices o ***quitando triángulos centrales sucesivamente***, cual introducido en 1915:



- Este es otro conjunto **fractal**, $D = \ln 3/\ln 2 \approx 1.58$, y aquí $\infty \cdot 0 \approx 1.58$. **(!)**

Más acerca de los fractales

- Los **fractales** proveen un marco de referencia adecuado para estudiar las geometrías complejas de la naturaleza.

Más acerca de los fractales

- Los **fractales** proveen un marco de referencia adecuado para estudiar las geometrías complejas de la naturaleza.

- Como lo dijo elocuentemente *Benoit Mandelbrot*, quien se inventó la palabra **fractal**, *"**las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza de los árboles no es lisa y tampoco los relámpagos viajan en línea recta**"*. **(!)**

Más acerca de los fractales

• Los **fractales** proveen un marco de referencia adecuado para estudiar las geometrías complejas de la naturaleza.

• Como lo dijo elocuentemente *Benoit Mandelbrot*, quien se inventó la palabra **fractal**, ***"las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza de los árboles no es lisa y tampoco los relámpagos viajan en línea recta"***. (!)

• Los fractales son relevantes en física, geofísica, economía, biología, etc.

Más acerca de los fractales

• Los **fractales** proveen un marco de referencia adecuado para estudiar las geometrías complejas de la naturaleza.

• Como lo dijo elocuentemente *Benoit Mandelbrot*, quien se inventó la palabra **fractal**, ***"las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza de los árboles no es lisa y tampoco los relámpagos viajan en línea recta"***. (!)

• Los fractales son relevantes en física, geofísica, economía, biología, etc.

• En efecto, los fractales están por todos lados y su repetitividad implícita, su "***auto-similaridad***", se refleja en la *sencilla* **ley de potencias**:

$$N(\delta) \sim \delta^{-D}$$

Orden y caos

(Lorenz, 1963; May, 1976; Gleick, 1987)

Orden y caos

- Los **fractales** también se hallan en la dinámica de sistemas ***no-lineales***. Para ilustrarlo, es pertinente estudiar el **mapa logístico** *cuadrático*:

$$X_{k+1} = \alpha X_k(1 - X_k)$$

que denota la evolución de una *población* de una generación a la siguiente.

Orden y caos

- Los **fractales** también se hallan en la dinámica de sistemas ***no-lineales***. Para ilustrarlo, es pertinente estudiar el **mapa logístico** *cuadrático*:

$$X_{k+1} = \alpha X_k(1 - X_k)$$

que denota la evolución de una *población* de una generación a la siguiente.

- La *población límite*, reiterando el mapa, depende del *parámetro* α.

Orden y caos

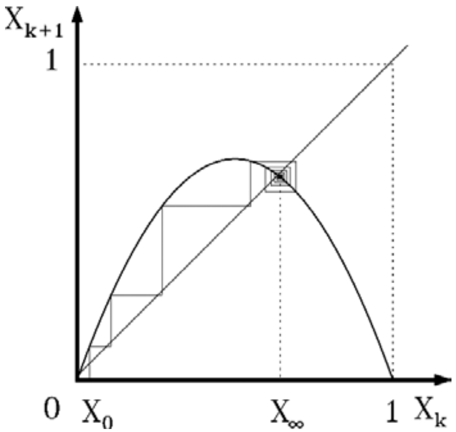
- Los **fractales** también se hallan en la dinámica de sistemas ***no-lineales***. Para ilustrarlo, es pertinente estudiar el **mapa logístico** *cuadrático*:

$$X_{k+1} = \alpha X_k (1 - X_k)$$

que denota la evolución de una *población* de una generación a la siguiente.

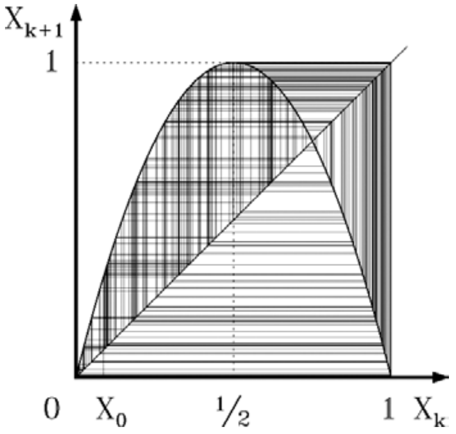
- La *población límite*, reiterando el mapa, depende del *parámetro* α.

- Cuando $\alpha = 2.8$, aparece una población ***estable***, X_∞, definiendo un ***orden***:



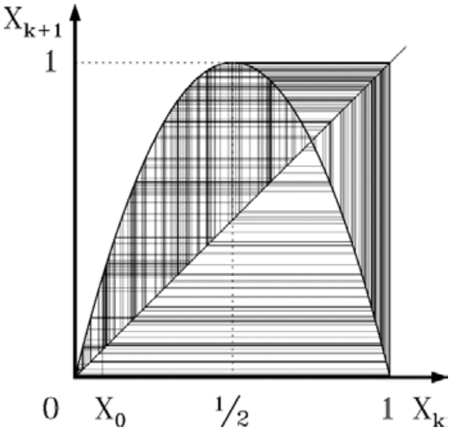
Orden y caos

- Cuando $\alpha = 4$ la población no descansa, sino que *vaga para siempre en el* ***polvo*** en un *atrayente* ***fractal***:



Orden y caos

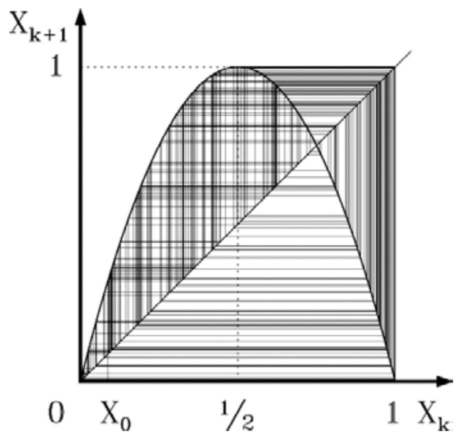
- Cuando $\alpha = 4$ la población no descansa, sino que *vaga para siempre en el **polvo*** en un *atrayente **fractal***:



- Este **caos** es *impredecible*, como la expansión de un número *irracional*.

Orden y caos

• Cuando $\alpha = 4$ la población no descansa, sino que *vaga para siempre en el **polvo*** en un *atrayente **fractal***:

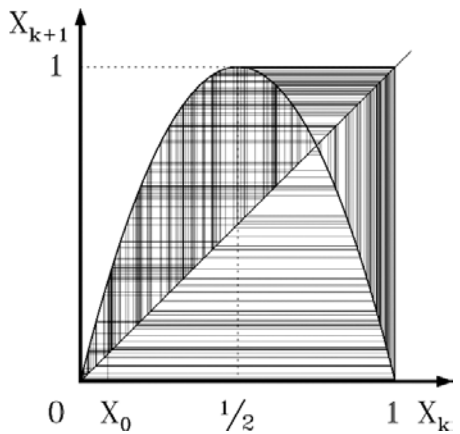


• Este **caos** es *impredecible*, como la expansión de un número *irracional*.

• Un error *pequeño* en el valor inicial X_0 produce *grandes* variaciones: e.g., un valor de 0.4 lleva a 0.1 luego de 7 pasos, pero 0.41 da lugar a 0.69. **(!)**

Orden y caos

• Cuando $\alpha = 4$ la población no descansa, sino que *vaga para siempre en el **polvo*** en un *atrayente **fractal***:



• Este **caos** es *impredecible*, como la expansión de un número *irracional*.

• Un error *pequeño* en el valor inicial X_0 produce *grandes* variaciones: e.g., un valor de 0.4 lleva a 0.1 luego de 7 pasos, pero 0.41 da lugar a 0.69. (!)

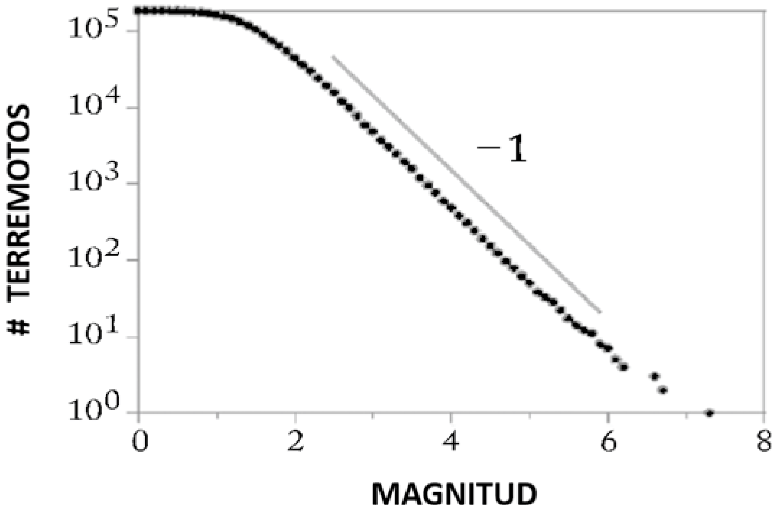
• Este "**efecto mariposa**" fue reconocido por primera vez al estudiar el *clima*.

Otras leyes de potencia

(Pareto, 1898; Schroeder, 1992; Turcotte, 1997)

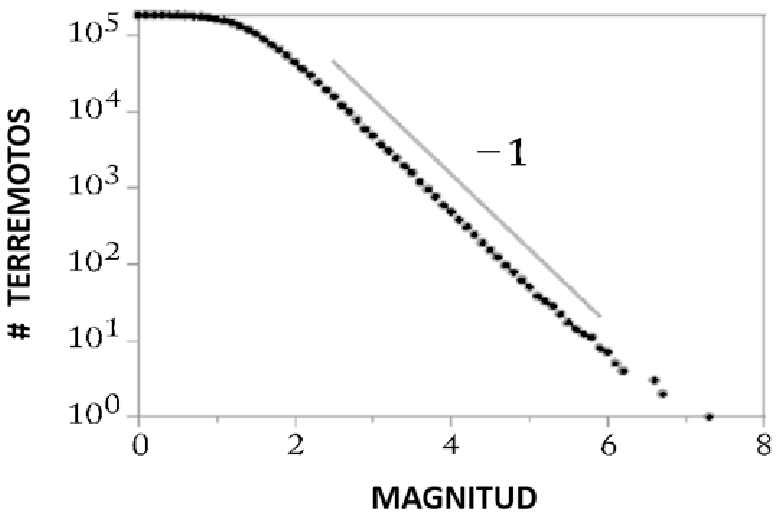
Otras leyes de potencia

- Ellas aparecen describiendo la frecuencia de eventos naturales complejos, tal y como los ***terremotos***, $P[X \geq x] \sim x^{-c}$, y dan ***líneas rectas*** en escalas ***doble- logarítmicas*** $(\ln P \sim -c \ln x)$:



Otras leyes de potencia

- Ellas aparecen describiendo la frecuencia de eventos naturales complejos, tal y como los ***terremotos***, $P[X \geq x] \sim x^{-c}$, y dan ***líneas rectas*** en escalas ***doble- logarítmicas*** $(\ln P \sim\ -c \ln x)$:



- Estas **curvas de Pareto**, con "***colas pesadas***" y sin ***escalas características***, aparecen en la ***violencia natural***, en ***avalanchas***, ***incendios***, etc., y también en las distribuciones de ***riqueza*** y ***conflictos*** de la ***fragmentación humana***.

…Bueno, aquí termina esta breve introducción.

En la siguiente oportunidad veremos cómo a partir de estas nociones se puede mostrar que Jesús es el camino, la verdad y la vida.

Hasta la próxima…

Referencias

Barnsley, M. F. (1988) *Fractals Everywhere*, Academic Press.

Feder, J. (1988) *Fractals*, Plenum Press.

Gleick, J. (1987) Chaos. Making a new science, Penguin Books.

Lorenz, E. N. (1963) “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of Atmopheric Sciences* 20:130

Mandelbrot, B. B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman.

May, R. M. (1976) “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, *Nature* 261:459.

Pareto, V. (1898) “Cours d’economie politique”, *Journal of Political Economy*.

Schroeder, M. (1992) *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*, W. H. Freeman.

Turcotte, D. (1997) *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press.