

# LECCIONES A PARTIR DE LA COMPLEJIDAD LA HIPOTENUSA, EL CAMINO DE LA PAZ

**Carlos E. Puente**

Department of Land, Air and Water Resources  
University of California, Davis  
Davis, CA 95616  
cepunte@ucdavis.edu

## **Resumen**

Un camino para la paz del mundo es revelado usando principios universales recientemente descubiertos en el estudio de la complejidad natural. Se muestra cómo simples nociones repetitivas de la ciencia moderna, tal y como se emplean para modelar la turbulencia atmosférica y otros procesos complejos, proveen un marco de referencia imparcial para visualizar la dinámica y las consecuencias de los rasgos divisivos que siempre han estado presentes en la humanidad, que abarca las enormes disparidades económicas y la desconfianza generalizada presentes en el mundo actual. Se explica cómo estas ideas sencillas, tan básicas que pueden ser entendidas por los niños, nos invitan a todos, de una manera lógica, a buscar la paz en una condición tipificada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

## 1. Introducción

En las últimas décadas se ha desarrollado una variedad de ideas encaminadas a comprender y predecir la complejidad de la naturaleza<sup>1</sup>, y en particular aquella generada por la turbulencia<sup>2</sup>. Este trabajo muestra cómo dichas ideas, por medio de su estudio detallado del orden y el desorden, nos permiten visualizar las consecuencias de nuestras acciones personales y colectivas y cómo ellas nos invitan a un único estado de balance y amistad, simbolizado por la hipotenusa de un triángulo rectángulo, en donde todos podemos lograr una paz duradera.

Las nociones en este artículo están basadas en las propiedades curiosas y **universales** de construcciones matemáticas sencillas conocidas como las **cascadas multiplicativas**, cuya estructura repetitiva de división ha sido encontrada útil en el estudio de la turbulencia y otros procesos complejos. Este trabajo explica cómo la evolución de dos cascadas genéricas, y sus combinaciones, permite representar la dinámica de nuestras actitudes de superioridad, que, si no se corrigen, producen naturalmente estados fragmentados, carentes de paz, y caracterizados por “turbulencia” en una variedad de escalas: dentro de nosotros mismos, en nuestras relaciones personales, en nuestras sociedades, en nuestros países, y en el mundo en general.

La organización de este trabajo es como sigue. Las dos cascadas multiplicativas genéricas, una que extiende desequilibrios y otra que propaga desunión, se introducen primero como juegos de niños. Esta presentación incluye un estudio de las propiedades más importantes de los juegos, seguida de explicaciones sobre cómo las ideas han sido empleadas para estudiar la turbulencia natural. Luego, se muestra cómo las dos cascadas están relacionadas con los sistemas político-económicos del mundo y cómo dichas conexiones definen un mapa prístino hacia la paz. El artículo termina con sus conclusiones.

## 2. Un Juego de Niños

Para fijar las ideas es pertinente introducir una cascada genérica mediante un juego sencillo, uno que los niños comprenden moldeando plastilina.

Comience el juego con una barra uniforme y córtela en dos pedazos que contengan el  $p = 70\%$  y el  $q = 30\%$  de la masa, como se muestra en la Figura 1(a). Luego, moldee los pedazos uniformemente, apilando el más grande y

estirando el otro, conservando el grosor constante, de modo que formen (de frente) dos rectángulos contiguos de igual base, como se esboza en la Figura 1(b).

El rectángulo de la izquierda, al tener longitud  $1/2$ , resulta 1.4 veces ms alto que la barra original, esto es tiene una altura igual a  $2p$ . Similarmente, el rectngulo de la derecha queda con 0.6 veces la altura del pedazo original, o sea igual a  $2q$ .

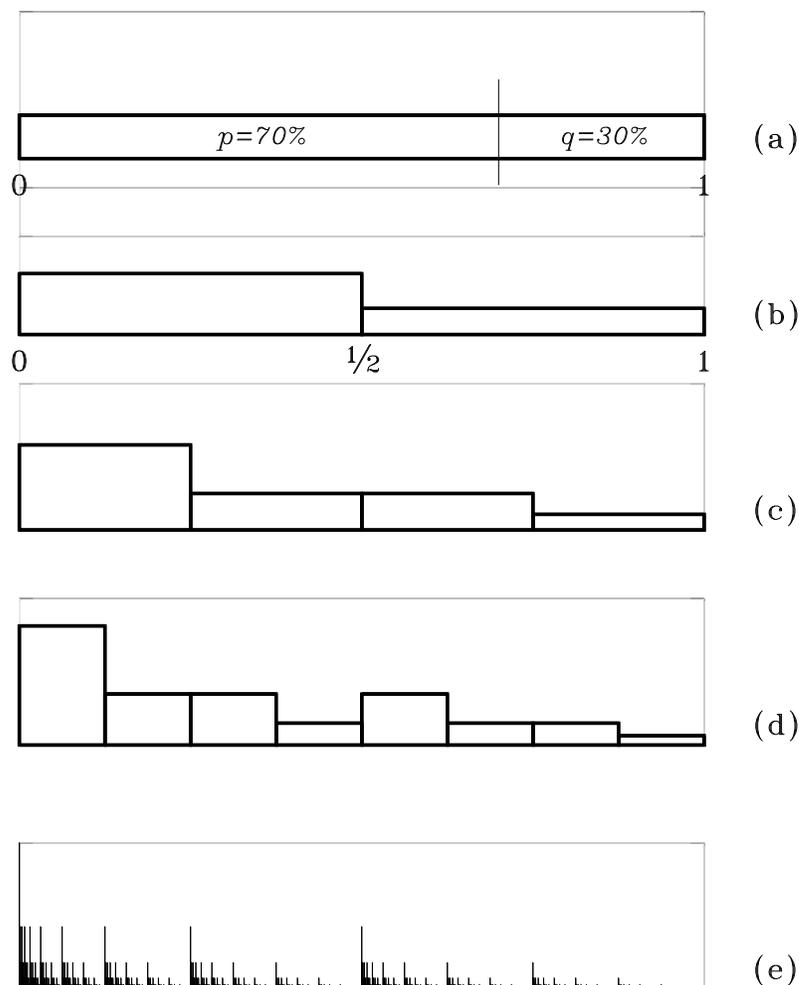


Figura 1. Una cascada multiplicativa genérica que extiende desequilibrios. De una barra de plastilina, (a), a  $2^{12}$  pedazos que conforman 13 capas, (e).

Con estos pasos plenamente entendidos, el juego continúa dividiendo cada pedazo de plastilina siguiendo las mismas proporciones como antes, dando lugar a cuatro rectángulos de longitud un cuarto, los cuales contienen, en orden, 49% (70% de 70%), 21% (30% de 70%), 21% (70% de 30%), y 9%

(30% de 30%) de la masa, como se muestra en la Figura 1(c).

Estas masas (áreas) corresponden a la expansión familiar de  $(p + q)^2$ , es decir,  $p^2$ , dos veces  $pq$ , y  $q^2$ , lo cual da lugar a las alturas de los cuatro rectángulos, de izquierda a derecha,  $4p^2$ ,  $4pq$ ,  $4pq$ , y  $4q^2$ .

Tal y como puede preverse, el juego prosigue a su tercer nivel de división (y en adelante), repitiendo el mismo proceso siguiendo una cadena o cascada, multiplicando por  $p$  y por  $q$  cada uno de los elementos previos, dando lugar a ocho rectángulos de igual tamaño, cuyas áreas corresponden a la expansión de  $(p + q)^3$ , como se observa en la Figura 1(d), y así sucesivamente.

Lo observado en la medida en que el juego continúa, desde el nivel **cero**, que corresponde a la barra original, hasta un nivel general  $n$ , es como sigue:

- (a) el número de pedazos de plastilina aumenta en potencias de dos,
- (b) el tamaño de dichos rectángulos disminuye en potencias de dos,
- (c) la altura del rectángulo más alto aumenta en potencias de  $(2p)$ , y
- (d) las áreas (masas) de los pedazos se distribuyen de acuerdo con la expansión de  $(p + q)^n$ , y dan lugar a  $(n + 1)$  capas,  $p^n, p^{(n-1)}q, \dots, q^n$ , que están distribuidas (por parejas) conforme al célebre triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 2 \ 1 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Por ejemplo y como se muestra en la Figura 1(d), cuando  $n = 3$  hay un rectángulo con área  $p^3$ , tres rectángulos con áreas  $p^2q$  y  $pq^2$ , y uno con área  $q^3$ , y así sucesivamente.

La Figura 1(e), mostrada comprimida pues su altura máxima es  $(1.4)^{12} = 56.7$  veces más grande que la de la barra original, ilustra estas tendencias generales cuando el juego se repite por  $n = 12$  niveles. Como puede verse, este juego produce un objeto complejo y altamente sesgado, el cual contiene rectángulos puntiagudos arreglados de una forma repetitiva y entrelazada.

Cuando el juego se repite muchas veces más, la plastilina, que originalmente estaba unida, se rompe en “**espinas** de alturas cada vez más altas, que tienen la propiedad de estar finamente intercaladas por capas, de modo que dos espinas de la misma altura no se tocan. El juego “sencillo” eventualmente desintegra la barra original en muchísimas púas dispersas y la mayoría de la masa se concentra en sólo una pequeña porción de las espinas más altas (por ejemplo, luego de 16 niveles del juego, el 79% de la plastilina está contenido en 20% de las espinas).

Para estudiar la estructura dispersa de las púas dentro de cada capa, es conveniente introducir otra cascada genérica.

### 3. Otro Juego de Niños

Este juego es similar al primero y los niños también lo comprenden moldeando una barra de plastilina.

Esta cascada también comienza de la misma manera: con una barra uniforme como en la Figura 2(a), pero ahora la barra es cortada por la mitad y cada pedazo es apilado uniformemente hacia los extremos de la barra, de modo que la masa se concentre en dos rectángulos de tamaño un tercio y altura tres medios, sin dejar nada en el tercio de la mitad, como se muestra en la Figura 2(b).

Este juego continúa dividiendo cada barra uniforme, apilando a ambos lados y dejando huecos en la misma proporción, para generar cuatro pedazos iguales no contiguos de longitud un noveno y altura nueve cuartos, que contienen cada uno el 25% de la masa, como se muestra en la Figura 2(c).

El juego sigue de la misma manera, produciendo después las ocho barras iguales mostradas en la Figura 2(d), y así sucesivamente. Lo que ocurre con este proceso sencillo se puede resumir como sigue:

- (a) el número de pedazos no contiguos aumenta en potencias de dos,
- (b) la longitud de dichos rectángulos disminuye en potencias de tres, y
- (c) la altura de todos ellos aumenta en potencias de  $(3/2)$ .

Al final, cuando este juego se repite muchas veces, la plastilina, que formaba una barra, queda fragmentada en espinas cada vez más altas, que eventualmente se concentran en una colección de puntos separados que tienen una

estructura particularmente vacía que se conoce adecuadamente como **polvo**. Este conjunto, también conocido como el conjunto de Cantor en honor a George Cantor quien lo introdujo en 1883, es un ejemplo prototípico de la geometría fragmentada o *fractal* encontrada comúnmente en la naturaleza<sup>1</sup>.

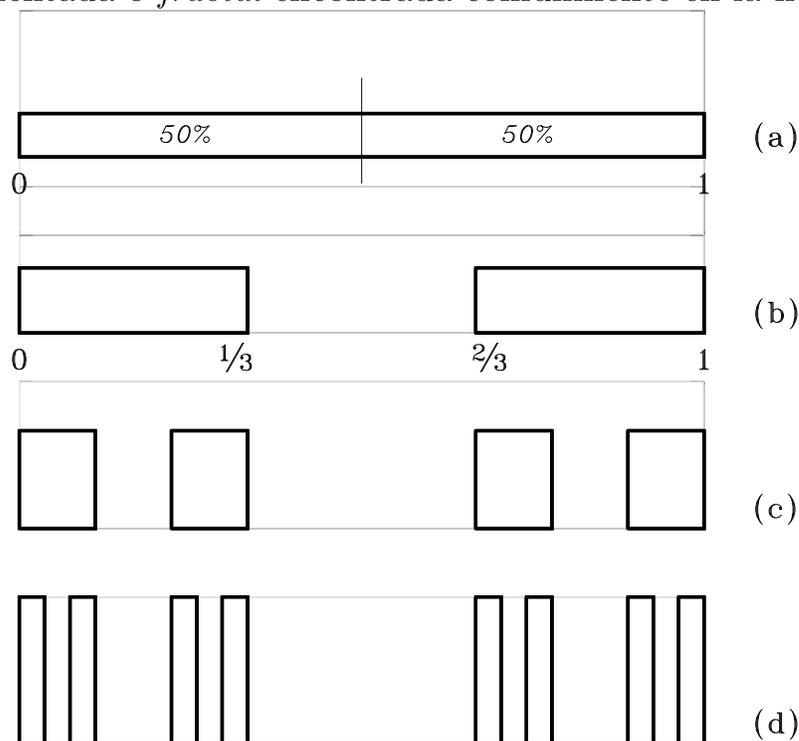


Figura 2. Una cascada multiplicativa genérica que propaga desunión. De una barra de plastilina, (a), a ocho pedazos iguales dispersos, (d).

La segunda cascada permite caracterizar cada una de las capas generadas por la primera cascada, como sigue. Si el tamaño del hueco inicial es cambiado de un tercio a un valor general  $h$  ( $0 \leq h \leq 1$ ), entonces los conjuntos de polvo resultantes expresan la estructura no contigua de las espinas de la primera cascada, con las capas más densas requiriendo huecos  $h$  más pequeños y viceversa<sup>3</sup>.

Estas observaciones nos ayudan a apreciar por qué las dos cascadas están, al final, íntimamente relacionadas la una con la otra y nos permiten entender por qué los objetos generados por el primer juego se conocen como **multifractales**, pues ellos contienen múltiples conjuntos de polvo, organizados conforme al triángulo de Pascal<sup>3</sup>.

Como la altura de las espinas producidas por ambas cascadas aumenta, y

por lo tanto no es posible dibujarlas en una hoja de papel (por ejemplo, ellas son más de 1,171 y 4,987 veces más altas que la de la barra inicial cuando  $n = 21$ ), es conveniente estudiar cómo se distribuye la plastilina dentro de dichos objetos, en la medida en que nos movemos de izquierda a derecha.

#### 4. La Plastilina Acumulada

La Figura 3 muestra los objetos generados por las cascadas genéricas y sus masas acumuladas, desde el principio hasta un punto arbitrario  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Con el propósito de comparar, la gráfica también incluye dicha información para el nivel cero de los juegos, es decir, la barra original de plastilina.

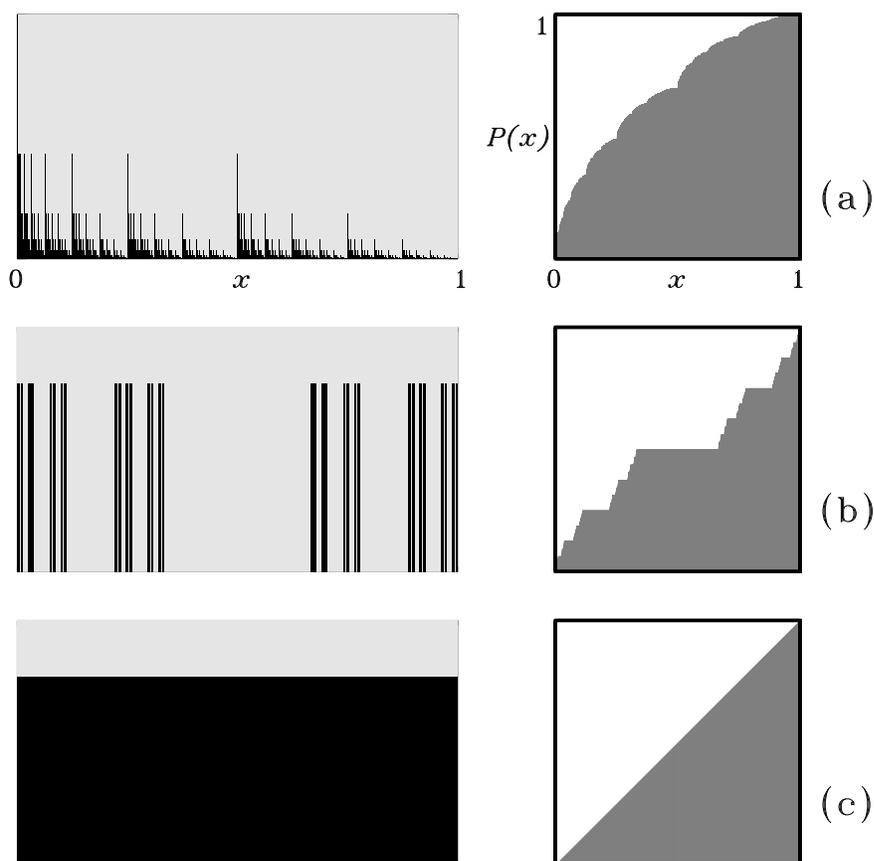


Figura 3. Plastilina acumulada (derecha) correspondiente a los objetos (izquierda) generados por: (a) extensión de desequilibrios, (b) propagación de desunión, y (c) preservación de la barra inicial.

Los objetos mostrados,  $P(x)$ , pueden entenderse fácilmente pues ellos reflejan la dinámica de los juegos, como sigue. Las *muestras* en la frontera de

“*nube*” asociada con el primer juego, Figura 3(a), corresponden a la secuencia de apilamientos y estiramientos: el 70% de la masa sucede desde el principio hasta  $x = 1/2$  (la hendidura más notoria), el 49% desde el principio hasta  $1/4$ , etc. Las *mesetas* presentes en la plastilina acumulada del segundo juego, Figura 3(b), se relacionan con los huecos horizontales de los apilamientos sucesivos: el 50% de la masa ocurre desde el principio hasta  $x = 1/3$  (y también hasta cualquier punto menor que las dos terceras partes), el 25% hasta su novena parte y una novena parte hacia adelante, etc. Y la **línea recta** que une los puntos  $(0,0)$  y  $(1,1)$  refleja la uniformidad de la plastilina original: el 50% de la masa sucede desde el principio hasta la mitad del objeto, el 25% hasta su cuarta parte, etc.

Los objetos acumulados correspondientes a los juegos resultan ser bastante peculiares, pues si uno cayera en paracaídas sobre ellos, uno creería, falsamente, que son planos, es decir, uno creería que ha caído sobre la barra uniforme de plastilina. Esta propiedad curiosa puede observarse claramente en el objeto del segundo juego, Figura 3(b), que, al concentrar la masa en espigas sobre polvo, da lugar a mesetas por todas partes. Similarmente ocurre con el primer juego, Figura 3(a), pues la nube contiene escalones horizontales-verticales por todas partes, dado que la masa en cualquier espina infinitesimal eventualmente desaparece.

Estas observaciones son **universales** para las dos cascadas, pues suceden para todos los objetos acumulados cuando se propagan **desequilibrios**,  $p \neq 1/2$ , o **huecos**,  $h \neq 0$ , de **cualquier** tamaño. Como los juegos conservan la masa de la barra original, los perfiles aparentemente planos, conocidos apropiadamente como las **escaleras del diablo**, unen sus puntos inicial y final, esto es,  $(0,0)$  y  $(1,1)$ , de forma tal que su longitud última es *siempre* igual a **dos** unidades, o sea, una unidad horizontal más una unidad vertical<sup>3</sup>.

Estos conjuntos acumulados y también los que se encuentran a partir de cascadas multiplicativas más generales, por ejemplo, (a) combinando arbitrariamente los juegos genéricos (considerando esquemas con desequilibrios y huecos), (b) partiendo la barra de plastilina en más de dos pedazos, y (c) empleando el azar para definir las particiones de nivel a nivel, definen al final distancias *máximas*, pues viajan por los **catetos** del triángulo rectángulo que corresponde al nivel cero, véase la Figura 3(c).

Como puede apreciarse, el **único** caso que no destruye la unidad y que por

tanto no define una escalera diabólica es aquel que preserva la barra original de los dos juegos. Claramente, este estado de **equilibrio** corresponde a un juego deliberado que siempre mantiene la simetría de la barra original, es decir, el proverbial “cincuenta-cincuenta:”  $p = 1/2$  y  $h = 0$ .

Para este caso improbable, uno que es sólo un punto en un mar de posibilidades, la plastilina acumulada se *alinea* en la *recta hipotenusa* y tal perfil adquiere una distancia *mínima* de  $\sqrt{2} \approx 1.4142\dots$ , en virtud del célebre teorema de Pitágoras.

## 5. Avances Recientes Sobre la Turbulencia Atmosférica

Cuando la energía del aire excede un umbral, <sup>4</sup> su *cohesión* interna es subyugada y él fluye de una manera interminante e irregular que está adecuadamente capturada por el rompimiento sucesivo (precisamente por el 70%) del primer juego de niños.

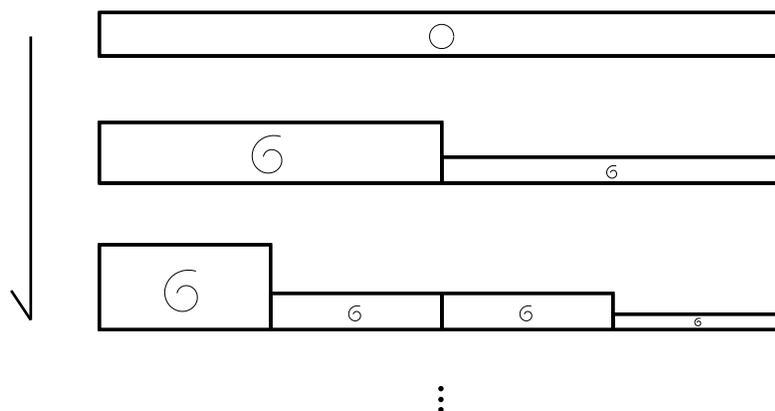


Figura 4. Cascada multiplicativa de remolinos en la turbulencia completamente desarrollada.

Como se muestra en la Figura 4, observaciones unidimensionales de turbulencia natural, y también de ciertos flujos generados en el laboratorio<sup>5</sup>, han sido encontradas **universalmente** consistentes con una *cascada multiplicativa* de *remolinos*<sup>6</sup>, denotados por espirales que rotan hacia adentro, que se dividen precisamente en las proporciones mostradas: los remolinos “hijos” tienen la mitad del tamaño de su “padre” y ellos transportan respectivamente el 70 y 30% de la energía.

Aunque estos resultados sorprendentemente sencillos no permiten predecir esta condición común llamada la *turbulencia completamente desarrollada*, pues el poder del aire no siempre emplea el 70% por izquierda sino que lo hace hacia ambos lados guiado por el azar<sup>5</sup>, ellos describen la formación, en cualquier lugar del mundo desde Afganistán hasta Zimbawe, de espinas *violentas* (y a veces mortíferas) y explican la eventual *disipación* de toda la energía en la forma de calor, cuando la escala de los remolinos es tan pequeña que allí el flujo deja de ser turbulento<sup>7</sup>.

## 6. Los Juegos y los Sistemas Políticos del Mundo

Como las cascadas repetitivas sencillas capturan la complejidad universal de la turbulencia natural y como varias generalizaciones de los juegos se han encontrado útiles para representar otros procesos intrincados<sup>8</sup>, es razonable emplear dichas nociones, ciertamente combinándolas y agregándoles azar, para ilustrar los posibles caminos que generan “*turbulencia*” en el mundo.

En este espíritu, los juegos sencillos explicados en las Figuras 1 y 2 pueden emplearse para describir la dinámica inherente de los sistemas políticos que han gobernado el mundo. Mientras que la primera cascada nos ayuda a visualizar la proliferación de desequilibrios económicos y la resultante desconfianza producida por la competencia en las sociedades capitalistas, la segunda cascada genérica nos permite apreciar la inutilidad de los regímenes totalitarios en su obstinado silenciamiento de voces disidentes en “huecos”, que, al final, destruyen completamente la unidad y la confianza.

Aunque estas observaciones puedan parecer simplistas, los juegos de niños también nos permiten observar las consecuencias últimas e históricas de los sistemas políticos y económicos del mundo. Por una parte, la inesperada pero predecible disipación del comunismo debida a su “igualdad” falsa y vacía y, de otra, la triste miseria que muchos experimentan en el mundo y los peligros futuros impuestos por el espinoso juego de la globalización.

A este respecto, el primer juego ofrece una advertencia profunda en contra de las políticas del mundo “civilizado”, pues el mismo objeto producido por dicha cascada luego de  $n = 20$  niveles se ajusta cercanamente a la distribución de la riqueza de la nación más poderosa en la tierra, precisamente cuando  $p = 70\%$  ¡tal y como se encuentra universalmente con la turbulencia natural!

De hecho, cálculos sencillos, considerando las capas de “plastilina” superiores empleando el triángulo de Pascal, muestran cómo la cascada reproduce la riqueza de los 5, 10, 20, y 40% más ricos en los Estados Unidos, tal y como se reporta para 1998, esto es, en orden, 59 (57), 71 (70), 84 (84), y 95% (95) de los recursos, con los valores de la cascada dados en paréntesis<sup>9</sup>.

Aunque la riqueza del 1% más rico en los Estados Unidos es subestimada por dicha cascada, 38% (30), claramente el simple juego divisivo nos permite imaginar lo que seguramente sucederá si los desequilibrios persisten, ya sea mientras  $n$  o  $p$  aumentan, o ambos<sup>10</sup>. Pues aún si las condiciones actuales son denominadas como “estables” o “prósperas” por algunos expertos, es fácil prever cómo, si las disparidades continúan creciendo, los índices económicos serán “poco saludables”<sup>11</sup>. Pues como los niños lo saben y como las leyes de la física nos lo aseguran, el juego de los desequilibrios termina como el juego de la desunión: con “todos mordiendo el polvo”<sup>12</sup>.

## 7. Los Juegos y Nuestra Búsqueda de la Paz

Claramente, las ideas sencillas aquí esbozadas también se aplican a nosotros como individuos, pues las cascadas reflejan y abarcan nuestras actitudes siempre cambiantes<sup>13</sup>. Pero las nociones también proveen una imagen positiva pues ellas nos permiten contemplar el estado *balanceado* en donde todos experimentamos la **amistad** y la **paz**.

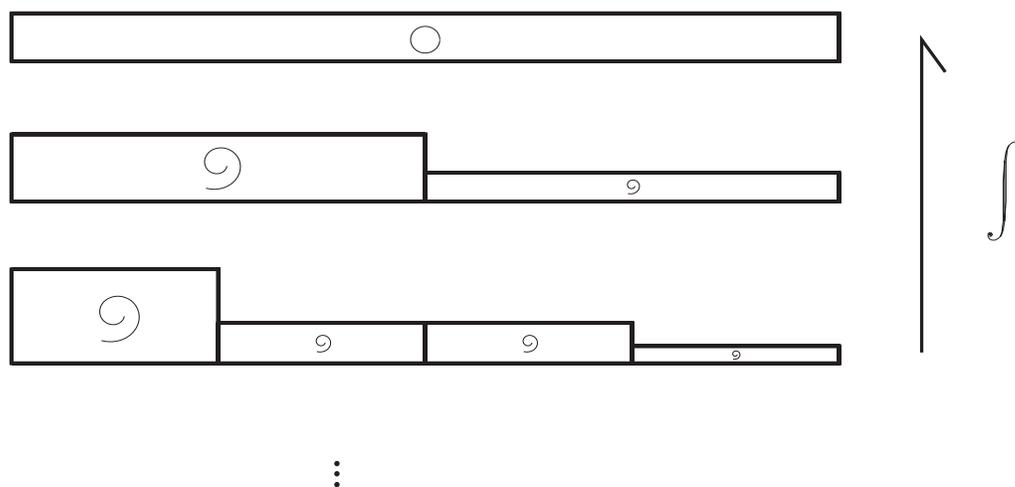


Figura 5. Reparación multiplicativa de la unidad mediante la integración.

Como puede apreciarse, el romper o reparar el equilibrio es nuestra decisión fundamental. Pues nosotros, como seres humanos y como niños que somos, podemos escoger inteligentemente el “navegar” la cascada natural en reversa, reemplazando un espiral egoísta ( $r = e^{-\theta}$ ) y el simbólico  $2/3 = 0.666\dots$  de cualquier cascada que desparrama<sup>14</sup>, como en la Figura 4, por uno amoroso rotando hacia afuera ( $r = e^{+\theta}$ ) que sueña un futuro justo para restaurar la **unidad**. Pues de una forma vívida, tanto aritmética como geoméricamente,  $1 = 0.999\dots$ , como puede apreciarse cuando se cortan las montañas y se llenan los valles de cualquier objeto (multifractal) que da lugar a una escalera del diablo, como se ilustra en la Figura 5.

Como el fluir (multiplicativo) del tiempo engendra eventualmente dos tipos diferentes de comportamiento: el camino más corto que mantiene el **equilibrio** y su *energía* o una escalera del diablo que dado su fraccionamiento incrementa la *entropía* y lleva a la disipación, es decir,  $\sqrt{2}$  en la *recta* hipotenusa o 2 en procesos violentos no lineales que viajan por los catetos, estas observaciones nos recuerdan que es sabio el vivir la vida bajo el umbral<sup>15</sup>. Pues, es inteligente el aumentar nuestra “*cohesión*” interna para repeler la falsa tentación de las posturas de superioridad presentes en las cascadas, que nos impiden vivir verdaderamente unidos en terreno sólido<sup>16</sup>.

Estos conceptos reiteran que es nuestra responsabilidad el encontrar y el compartir la paz, pues podemos escoger el romper el equilibrio usando cualquier cascada o sus combinaciones, independientemente del sistema político de la nación en la que residimos. Estas imágenes también reafirman, de una manera claramente geométrica, que nuestro estado deseado está íntimamente ligado con la *rectitud*, la *balanza*, la *hermandad*, el *perdón*, la *reconciliación*, y el **amor**, mientras que su antítesis se relaciona con la indiferencia, la venganza, el odio (aún en contra de nuestros enemigos) y con cualquier tipo de “desigualdad” y “discriminación”, no importa qué tan sutil, que produce desconfianza, vacío, y gran soledad. Pues los estados comunes pero anómalos definidos por nuestros rasgos divisivos están potentemente simbolizados por el absurdo de “*caminar sobre espinas*,” y esta es una condición que no puede evitarse por medio de alucinógenos u otras distracciones mundanas, sino atreviéndonos a vivir solidariamente, ayudándonos los unos a los otros.

Los problemas que nos aquejan son ciertamente **universales** y correspon-

den a estados que provienen de romper el equilibrio mediante cadenas de desequilibrios y huecos. Como nuestros “juegos de poder”, aparentemente diferentes, eventualmente dan lugar a separaciones extremas (infinitas si no se corrigen), unas basadas en nuestro afán desmedido por acumular recursos (el primer juego), es decir \$, que es el opuesto de la deseada integración, la letra S alargada y esbelta, y otras creadas al intentar imponer estilos de vida a la fuerza (el segundo juego), estas reflexiones apuntan a un **único camino**, a una condición verdaderamente justa y digna para todos, a un caso improbable pero factible que descarta la hipocresía y el terror, a una realidad que “sana las heridas” y respeta la vida, a la única situación que nos permite encontrar nuestra “**raíz**” común: el estado llano y sencillo simbolizado por la preciosa e imperturbable hipotenusa,  $Y = X$ .

## 8. Conclusiones

Este trabajo representa un llamado urgente a la igualdad, la unidad, y el amor, en medio de amplia “turbulencia” en el mundo de hoy. Es claramente urgente, pues muchos hermanos carecen de los medios esenciales para su supervivencia y porque (muy coincidentalmente) las dos terceras partes de la población de la tierra viven bajo condiciones de pobreza<sup>17</sup>. Es particularmente urgente, pues las leyes de la física nos advierten del colapso generalizado (disipación) que nos amenaza si las espinas continúan su proceso de cascada, en un mundo cada vez más interconectado.

Este trabajo establece una conexión imprevista pero directa entre una variedad de valores universales y los conceptos geométricos mundialmente reconocidos de la hipotenusa y los catetos. Dada la sencillez de las ideas requeridas para describir las cascadas genéricas y la prominencia del teorema de Pitágoras por todo el mundo, se espera que estas ideas puedan ser útiles para diseñar campañas educativas, para niños y adultos, que nos permitan a todos moldear la paz del mundo.

## AGRADECIMIENTOS

El autor dedica este trabajo a Silvio Rodríguez<sup>18</sup>, un hermano vigía que, deslumbrado por la luz y a pesar del viento, ha sabido sembrar, con mil pocos de amor, la razón del equilibrio.

## REFERENCIAS Y NOTAS

1. Por ejemplo, B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, (Freeman, San Francisco, 1982); P. Bak, *How Nature Works*, (Copernicus, New York, 1996); y R. Badii y A. Politi, *Complexity*, (Cambridge University Press, 1997).
2. U. Frisch, *Turbulence*, (Cambridge University Press, 1995).
3. J. Feder, *Fractals*, (Plenum Press, New York, 1988).
4. La turbulencia ocurre cuando el número de *Reynolds*,  $R = \frac{vL}{\nu}$ , es suficientemente grande (mayor que 200), esto es, cuando la inercia dada por  $v$  multiplicada por  $L$ , el producto de la velocidad y una longitud característica, subyuga la viscosidad del aire  $\nu$ . Tal condición ocurre comúnmente en la atmósfera cuando la velocidad excede 24 kilómetros por hora.
5. K. R. Sreenivasan, "Fractals and Multifractals in Fluid Turbulence," en *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 539 (1991).
6. El modelo de cascada fue propuesto por el famoso pacifista L. F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Processes*, (Cambridge University Press, 1922).
7. La escala  $\eta$  a la cual la disipación ocurre depende del número de Reynolds,  $R$ , y de la escala inicial del sistema,  $L_0$ , conforme a  $\eta/L_0 = R^{-3/2}$ . Esta condición permite calcular el número de niveles de la cascada hasta la disipación,  $n$ , a partir de la ecuación  $R^{-3/2} \approx 1/2^n$ , lo cual da  $n = 12$  para  $R = 256$  y  $n = 24$  para  $R = 65, 536$ .
8. Por ejemplo, Y. Tessier, S. Lovejoy, y D. Schertzer, "Universal Multifractals: Theory and Observations for Rain and Clouds," *J. Appl. Meteorology* **32**, 223 (1993); C. E. Puente, N. Obregón, O. Robayo, M. G. Puente, y D. Simsek, "Projections off Fractal Functions: A New Vision of Nature's Complexity," *Fractals* **7(4)**, 387, (1999); y B. B. Mandelbrot, *Multifractals and 1/F Noise: Wild Self-Affinity in Physics (1963-1976): Selecta Volume N*, (Springer-Verlag, Berlin, 1999).
9. Para hallar estadísticas relevantes de la distribución de la riqueza en los Estados Unidos y en otros países, véase L. A. Keister, *Wealth in America*, Cambridge University Press, 2000; K. Phillips, *Wealth and Democracy*, Broadway Books, 2002; M. Buchanan, "Wealth Happens," *Harvard Business Review*, April 2002; y al portal en la red informática [www.globalpolicy.org](http://www.globalpolicy.org). Para mayor información sobre el espinoso tópico de la globalización, léase N. Hertz, *Silent Takeover: Global Capitalism and the Death of Democracy*, Free Press, 2002 y T. H. Friedman, *The Lexus and the Olive Tree: Understanding Globalization*, Anchor Books, 2000.
10. Por ejemplo, si  $p = 0.7$  y  $n = 30$ , los 5, 10 y 20% más ricos en dicha sociedad tendrán, en orden, 73, 84 y 92% de la riqueza, un aumento considerable a partir del 57, 70 y 84%, como se reportó en el texto cuando  $n = 20$ . Si  $p = 0.75$  y  $n = 30$ , las disparidades (siempre entrelazadas) son aún peores pues dan, para los mismos percentiles, en orden, 90, 95 y 98% de la riqueza.
11. Las distribuciones de riqueza de países alrededor del mundo pueden ajustarse mediante cascadas multiplicativas generales que también dan lugar a escaleras del diablo. Estas pueden obtenerse dividiendo la masa en más de dos pedazos (si se requiere) y seleccionando multiplicadores apropiados y no necesariamente iguales de nivel a nivel ( $p_j$ 's).

Este marco de referencia ciertamente ajusta cualquier distribución de riqueza con un índice de Gini arbitrario entre 0 y 1, donde 0 denota la equidad y 1 la concentración de la riqueza en un sólo individuo.

12. Aún si no conocemos el “número de Reynolds del mundo”, la disipación implicada por la injusticia y el terrorismo no puede prevenirse por medio de las fuerzas divisivas del “mercado”, sino mediante el compartir conciente de recursos entre las personas y naciones “ricas” y “pobres”.
13. Aunque esta peculiar analogía relacionada con nuestras acciones no es, claro está, del todo precisa, pues nosotros difícilmente rompemos el equilibrio exactamente por el mismo camino, el combinar las cascadas (y agregando azar en el proceso) nos ayuda a ilustrar las consecuencias nefastas de nuestros “desequilibrios” y “vacíos”, pues en los patrones llenos de espinas y polvo se reflejan nuestros corazones desolados, relaciones quebrantadas, sociedades dispersas, la violencia y la guerra.
14. La fracción  $2/3$  se encuentra prominentemente en diversos resultados relacionados con la turbulencia natural. Ellas incluyen la ley de los “dos tercios” que explican el decaimiento del espectro de potencias de la turbulencia de acuerdo con la constante universal de Kolmogorov,  $-5/3$ , y otros modelos estocásticos de cascada, aún más precisos que los explicados en este trabajo. Para mayores detalles véase la referencia 2.
15. Aunque un poco de turbulencia puede ser provechosa para moldear nuestro carácter, para evitar sus últimas consecuencias el número de Reynolds debe ser pequeño. Esto significa bajar la “velocidad de nuestras vidas”, disminuir nuestras “longitudes características”, y aumentar nuestras “viscosidades”.
16. Si uno cae en paracaídas sobre la hipotenusa, uno se desliza hacia el origen.
17. H. de Soto, *The Mystery of Capital*, Basic Books, 2000.
18. Una muestra del trabajo de este talentoso poeta y cantante cubano se encuentra en *Descartes*, CD Ojalá 0020, 1998.

## LA HIPOTENUSA

*A todos mis estudiantes,  
colaboradores y colegas.*

¿Te acuerdas,  
cuando estabas en la escuela?

¿Te acuerdas,  
aprendiendo de veras?

¿Te acuerdas,  
pintando todo el día?

¿Te acuerdas,  
jugando geometría?

¿Te acuerdas,  
de los ángulos rectos?

¿Te acuerdas,  
de los tales catetos?

¿Te acuerdas,  
de hipotenusa y su distancia?

¿Te acuerdas,  
del teorema de tu infancia?

*Pitágoras!*

**Ahora vamos a explorar  
para que más sirva eso,  
ahora vamos a estudiar  
su relación con lo nuestro.**

**Ahora vamos a explorar  
para que más sirva eso,  
ahora vamos a estudiar  
su relación con lo cierto.**

Hay dos caminos  
ve, no es invento,

el uno es mentira  
y el otro es recto.

Camino largo  
o viaje derecho,  
exigiendo en vano  
o dando alimento.

Conciencia ligera  
o corazón pesado,  
la vida plena  
o tiempo gastado.

Yendo por el medio  
o por los catetos,  
hallando la raíz  
o perdiendo el centro.

**Mira, esto es sólo verdad,  
mira, la vida como va. (2)**

**Aunque lo dudemos,  
no hay más opción,  
y aunque parezca exageración:  
o usamos la hipotenusa  
o vamos por los catetos. (2)**

*Mira que es cierto...*

Si tu corazón no miente  
y comprendes que hay hermano,  
si tú haces lo que es bueno  
y al que sea das la mano:  
**usas la hipotenusa.**

Y si me pongo iracundo  
y mi ego incita al tajo,  
si acumulo los rencores

sin perdonar desde abajo:  
**voy por catetos.**

Si el amor guía tu día  
en lo humilde de la entrega,  
si construyes la alegría  
en constante vida nueva:  
**usas la hipotenusa.**

Y si me hago el bobo  
con hipócrita conciencia,  
y si lo ajeno es excusa  
para crecer mi indiferencia:  
**voy por catetos.**

*¿No es cierto?*

*Entonces, corolario.*

*Coro, ¿qué?*

*Aprende el coro...*

**Ay por catetos no,  
ay por catetos no,  
ay Dios,  
usa la hipotenusa.**

**Ay por catetos no,  
ay por catetos no,  
no no no,  
usa la hipotenusa.**

Para vivir en paz  
para sembrar unión,  
**ay Dios,  
usa la hipotenusa.**

Para sanar dolor

para gestar amor,  
**ay Dios,  
usa la hipotenusa.**

Para reir al fin  
para entender mejor,  
**ay Dios,  
usa la hipotenusa.**

Para crecer la fe  
para soñar el sol,  
**ay Dios,  
usa la hipotenusa.**

*No olvidemos...*

**Ay por catetos no,  
ay por catetos no,  
ay Dios,  
usa la hipotenusa.**

*Oye amigo...*

**Ay por catetos no,  
ay por catetos no,  
no no no,  
usa la hipotenusa.**

*¿Está claro?, Entonces...*

**Ay por catetos no,  
ay por catetos no,  
no no no,  
usa la hipotenusa.**

