

LA ESENCIA DEL CAOS

Carlos E. Puente

Department of Land, Air and Water Resources

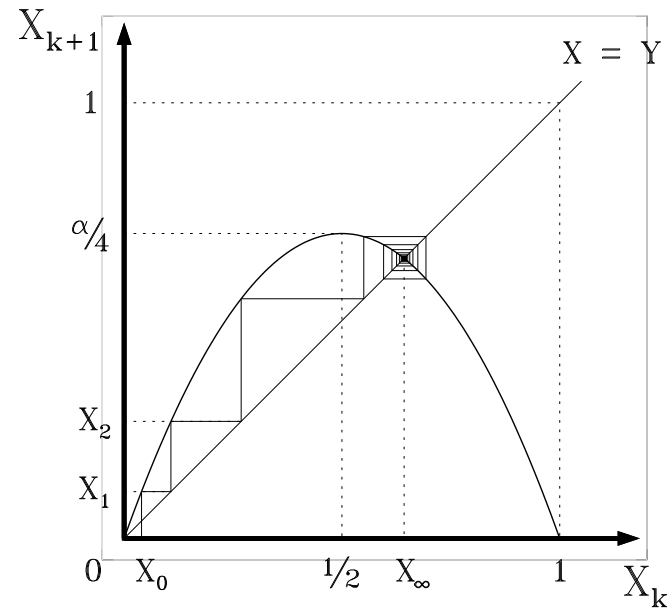
University of California, Davis

<http://puente.lawr.ucdavis.edu>

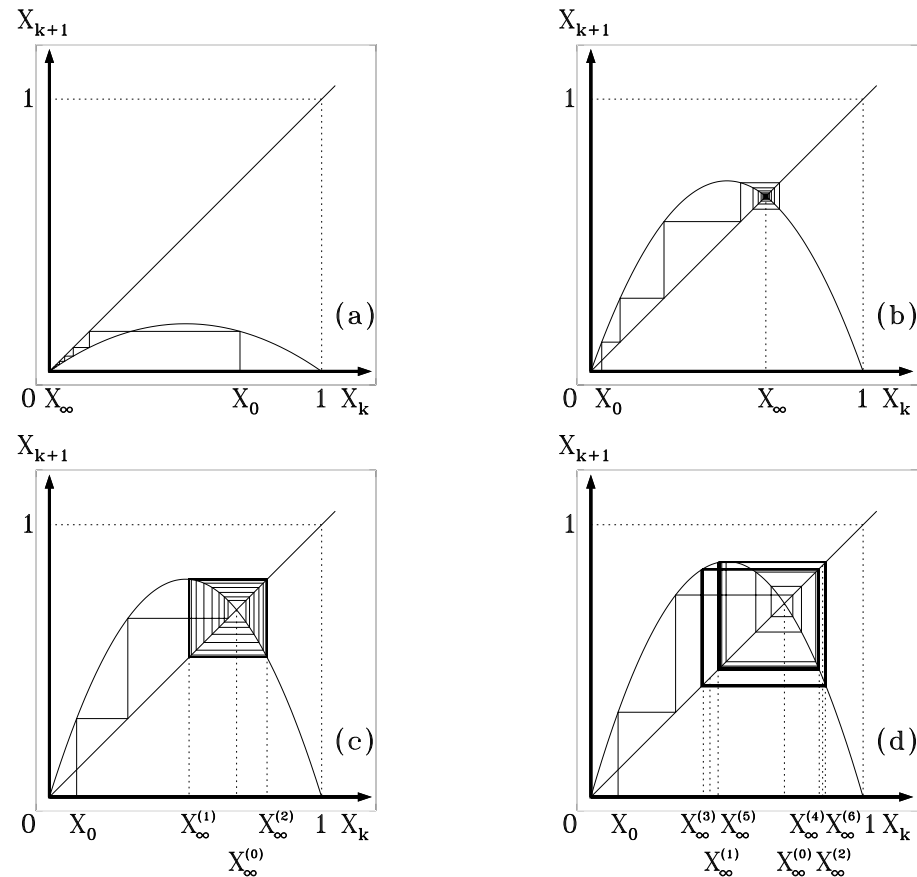
Resumen

- *Introduce la curva logística y su dinámica increíble.*
- *Explica cómo dicha ecuación da lugar a comportamientos periódicos y caóticos.*
- *Introduce el árbol de Feigenbaum y sus asombrosas propiedades universales.*
- *Muestra caminos entrelazados que llevan a distintos destinos en la plenitud del caos.*
- *Ilustra que existe una salida improbable del caos más profundo.*
- *Argumenta que “el abandono” es fundamental para entrar al Reino de los Cielos.*

- Alabada como uno de los logros científicos más importantes del siglo veinte, la teoría del caos también provee, en mi opinión, símbolos útiles y conmovedores con relación a nuestra paz.
- La ecuación prototípica empleada para ilustrar esta bien establecida teoría es la *curva logística*: $X_{k+1} = \alpha X_k(1 - X_k)$, $\alpha \in [0, 4]$. X es el tamaño normalizado de una “población” entre 0 y 1, digamos conejos, k y $k + 1$ son generaciones subsecuentes, y α es un *parámetro*.
- La *parábola* logística, la cual exhibe un aumento de generación a generación si la población es pequeña pero una disminución si es larga, se muestra abajo ($\alpha = 2.8$) junto con una secuencia de *iteraciones*, una *órbita*, que muestra el *destino final* de la población, X_∞ .

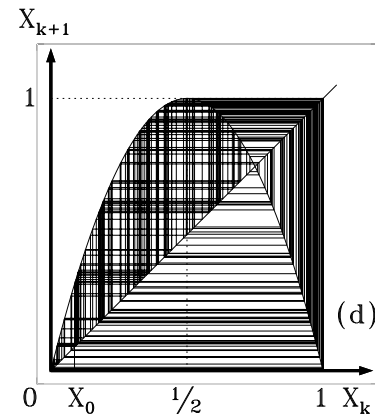
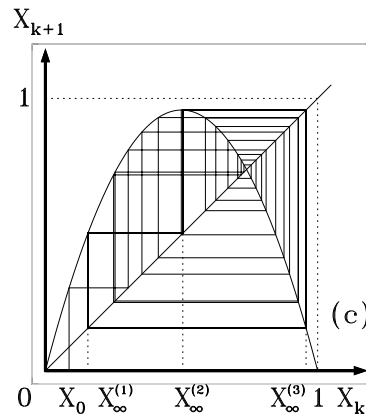
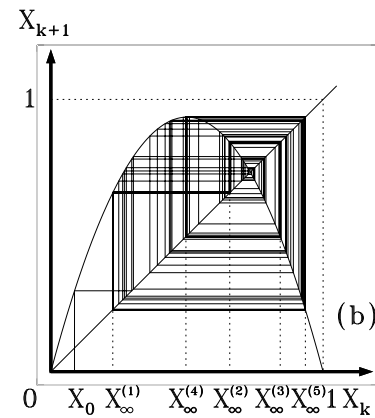
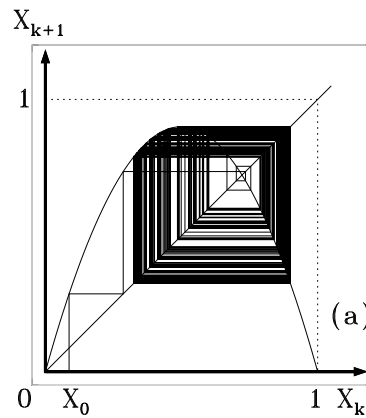


- El valor final X_∞ depende de la escogencia de α :



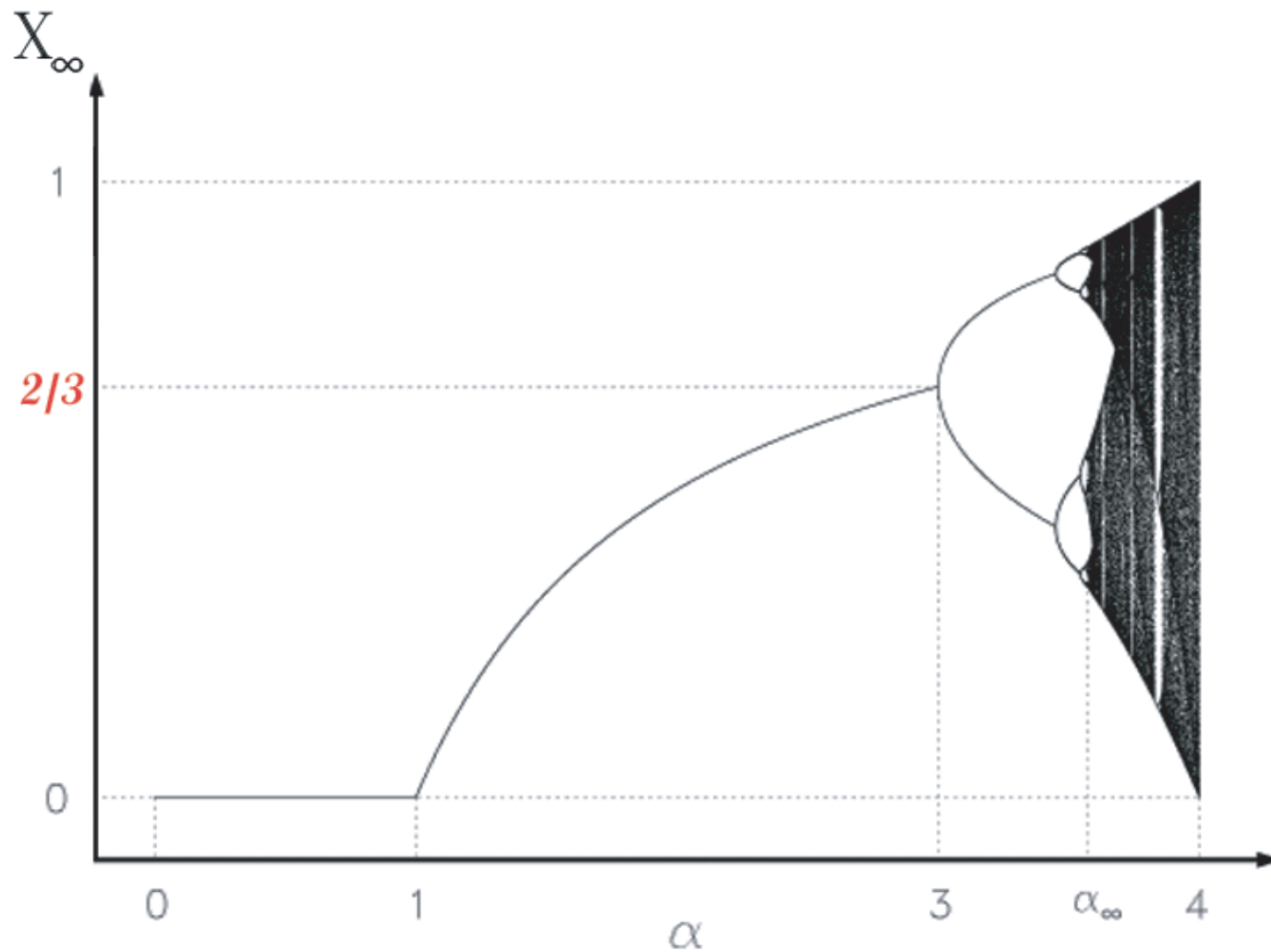
- Si la parábola está *debajo* de $X = Y$, como en (a), $X_\infty = 0$. *Cero* es *punto fijo estable*.
- Si la curva está *por encima* y $\alpha < 3$, como en (b), $X_\infty = (\alpha - 1)/\alpha$. X_∞ es un *punto fijo*.
- Si $\alpha > 3$ como en (c,d) ($\alpha = 3.2, 3.46$), se generan *oscilaciones*, cada 2 o 4 generaciones. (!)
- Si la parábola está encima de la línea, **el origen repele**, pues la pendiente allí es muy alta.

- *Bifurcaciones* sucesivas ocurren al aumentar $\alpha \leq \alpha_\infty \approx 3.5699$: esto es, oscilaciones cada 2 generaciones, cada 4, cada 8, cada 16, y, rápidamente, cada *potencia de 2*. (!)
- Después de α_∞ el comportamiento puede ser o *periódico* o *no repetitivo*:

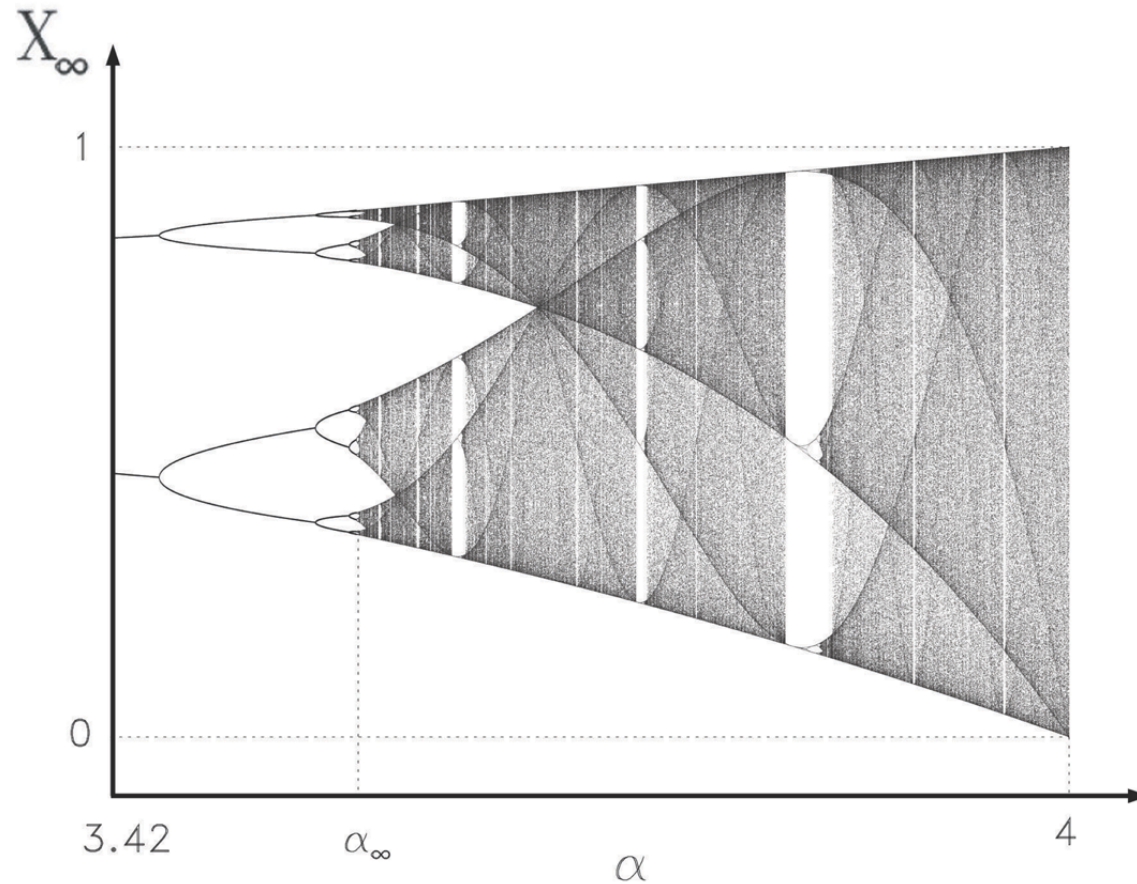


- (a,d) ($\alpha = 3.6, 4$) dan “*conjuntos atrayentes extraños*” y **caóticos**: infinitos no contables.
- (b,c) ($\alpha = 3.74, 3.83$) producen oscilaciones que se repiten cada 5 y 3 generaciones. (!)

- El *conjunto atrayente estable* de la dinámica, esto es, X_∞ en función de α , se conoce en la literatura como el *diagrama de las bifurcaciones* o el *árbol de Feigenbaum*:

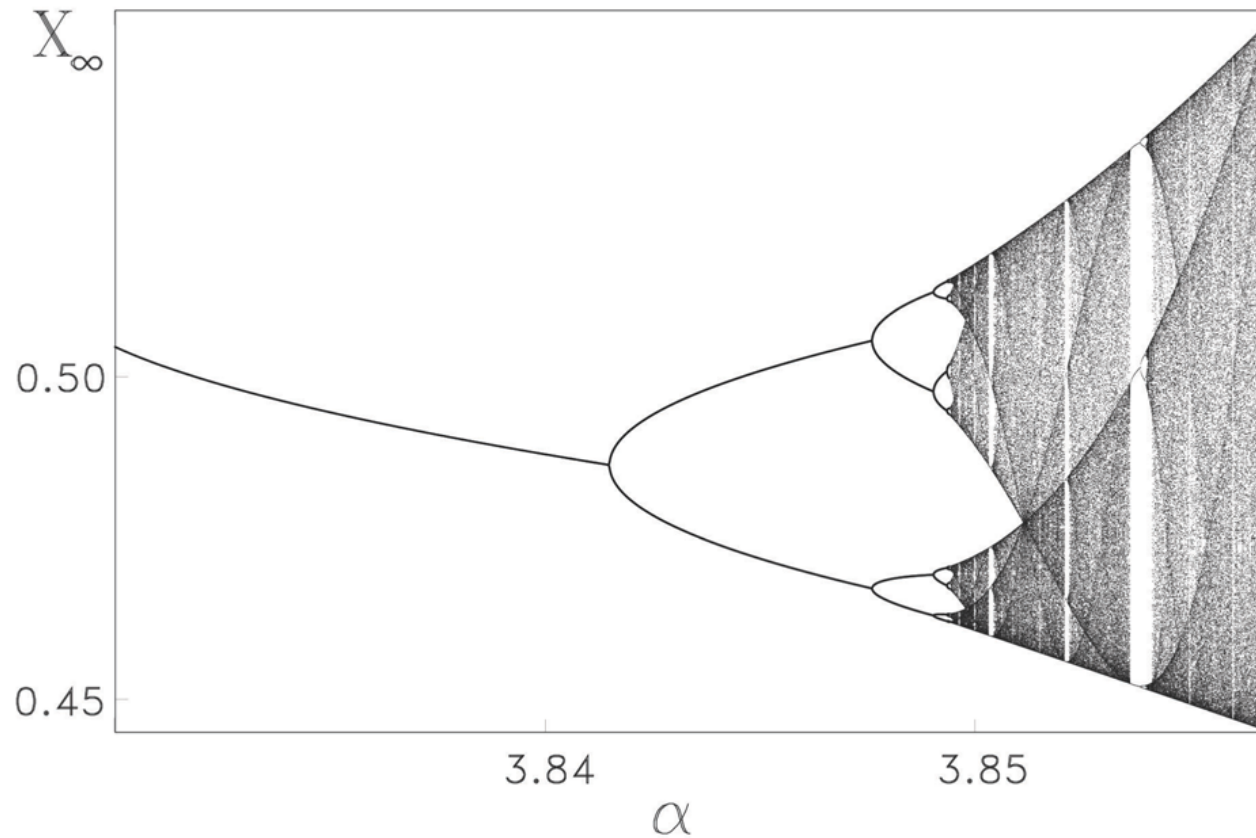


- La cola de dicho diagrama da: (!)



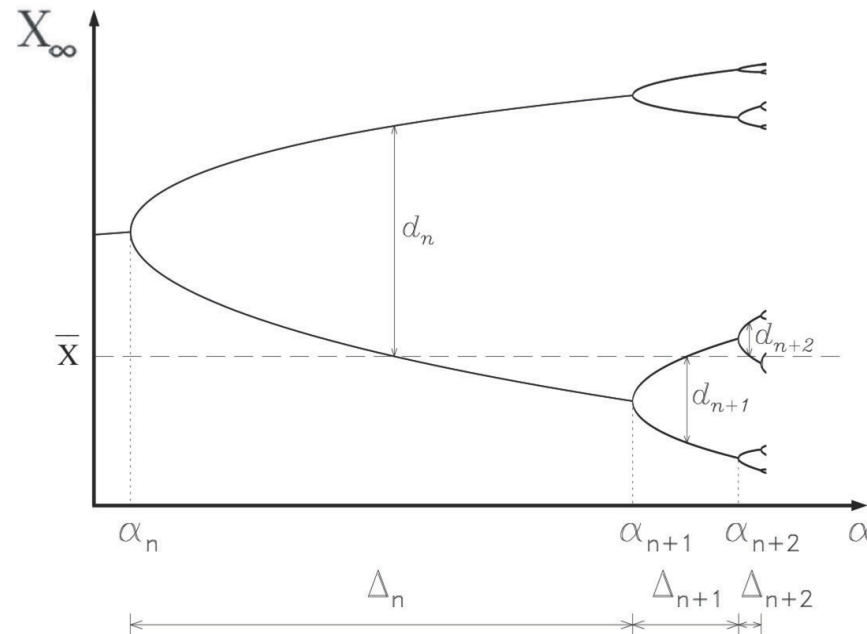
- La dinámica contiene “*bandas blancas*” periódicas para cualquier número mayor que 2. (!)
- De una forma asombrosa, el árbol abarca repeticiones para todo número de generaciones. (!)

- Al amplificar el *brote* central del período 3 resulta: (!)



- Esto es, topológicamente, una copia reducida del árbol a partir de su primera rama. (!)
- La dinámica es increíblemente rica y contiene, en efecto, una amplia *auto-similaridad*. (!)

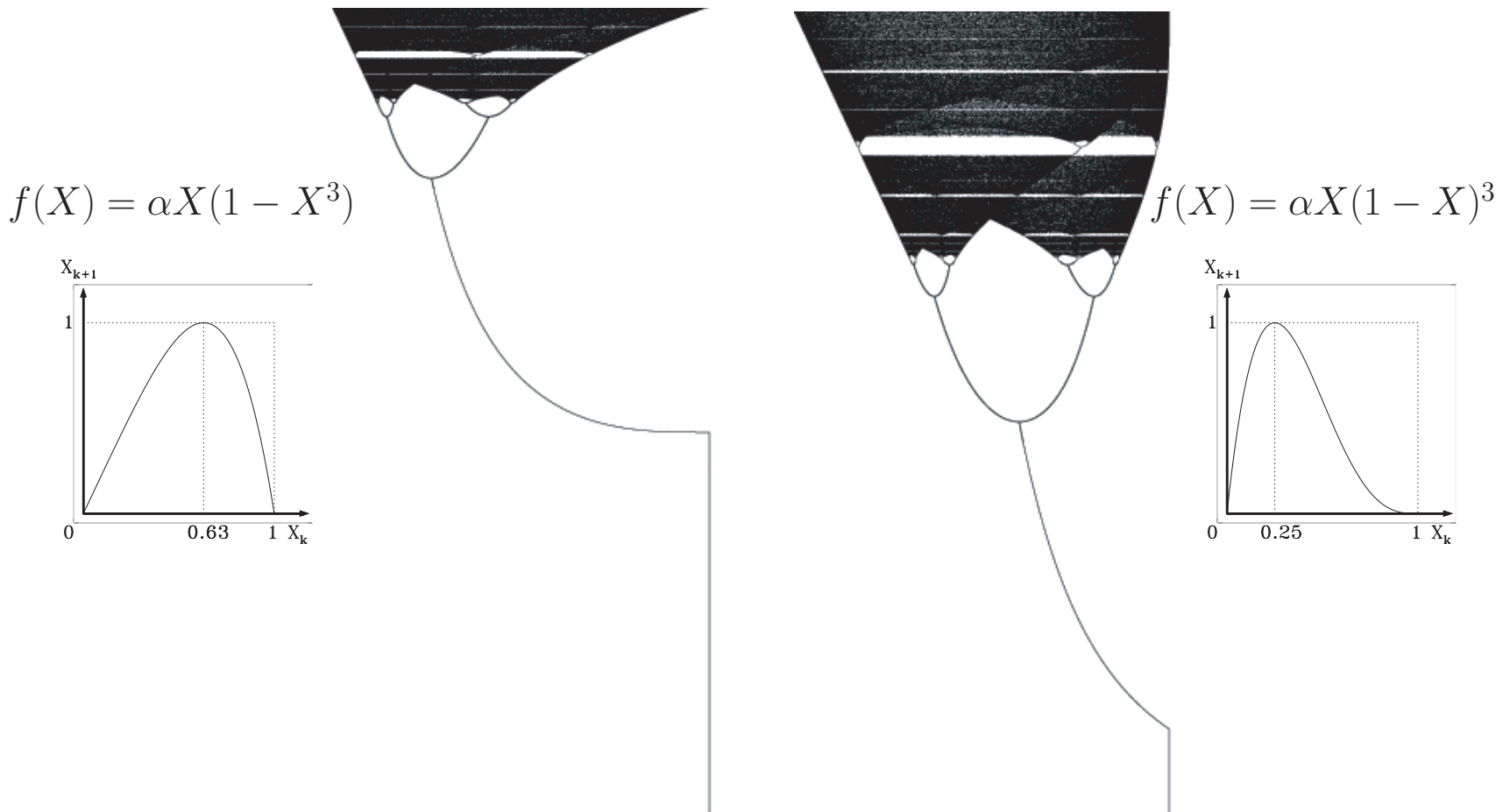
- Mitchell J. Feigenbaum mostró en 1978 que dicho comportamiento es **universal**, pues las bifurcaciones siempre ocurren de acuerdo a dos constantes \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 :



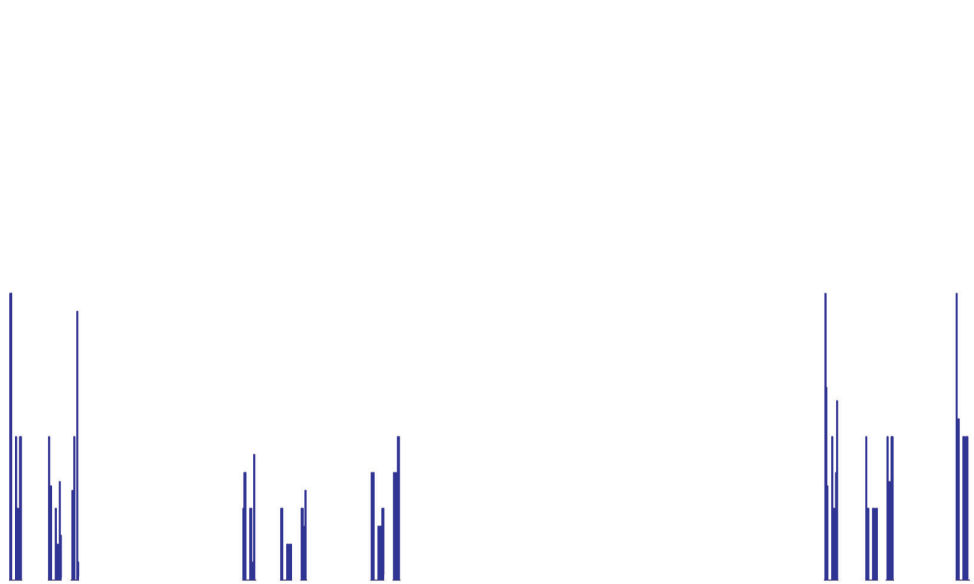
$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \longrightarrow \mathcal{F}_1 = -2.5029 \dots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \longrightarrow \mathcal{F}_2 = 4.6692 \dots$$

- Las ideas resultan ser relevantes en *física, química, biología, economía* y en otros campos.
- De una forma sorprendente y como lo encontraron Albert Libchaber y Jen Maurer para el helio líquido en 1978, el camino a la turbulencia mediante la **convección** está muy bien reproducido por las ideas, cuando α denota el *calor* que se le agrega al fluido. (!)

- Se ha establecido que existe un “orden en el camino al desorden” para la “ruta al caos mediante bifurcaciones”: pues cualquier curva unimodal **no lineal** llana da lugar a una “raíz”, a una “rama”, a “ramas” de bifurcaciones, y, de una manera ordenada y entrelazada, a “ramas” periódicas y al “follaje del caos”, todo de acuerdo a \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 : (!)



- Los diagramas contienen muchos sitios en donde la dinámica produce histogramas **multi-fractales** sobre *polvo Cantoriano*, similares a los descritos con relación a las cascadas.
- Para la curva logística, el primero ocurre en $\alpha_\infty = 3.5699\dots$, esto es, en el llamado *conjunto atrayente de Feigenbaum* compuesto por un polvo incontable:



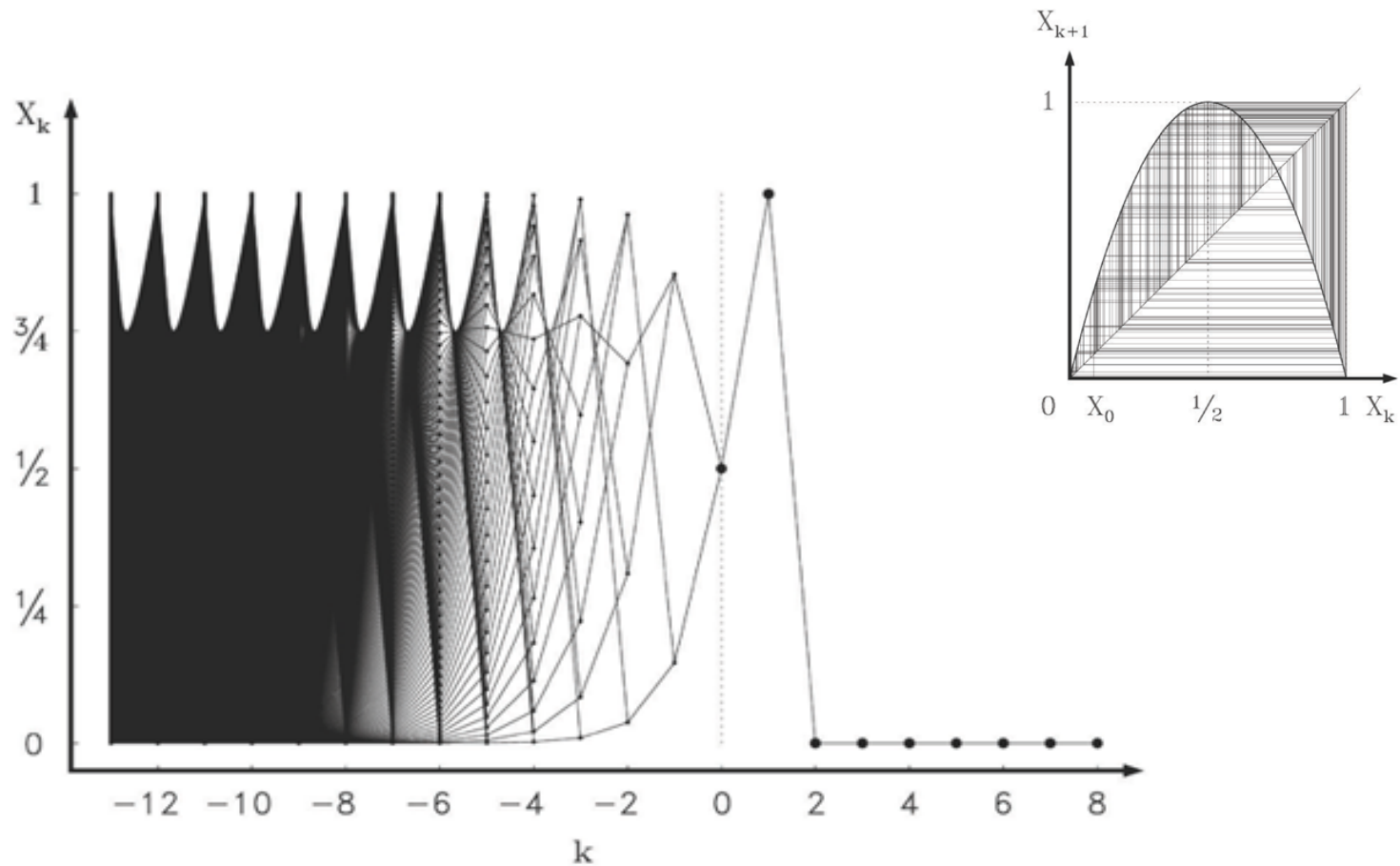
- Histogramas similares con púas, i.e., con un número infinito de *espinas* infinitas y que satisfacen la ecuación $\infty \cdot 0 = 1$, suceden en los *puntos de acumulación* de todos los *brotos*, al final de cada ventana periódica del árbol. (!)

- Para apreciar un poco más lo que es el caos, es conveniente considerar lo que ocurre cuando dicho estado es máximo, i.e., cuando $\alpha = 4$ y la parábola incluye todo el intervalo $[0, 1]$.
- El caos genera una *órbita que nunca se repite* y que cubre casi todo el intervalo $[0, 1]$, pero no lo abarca todo pues excluye las ramas *inestables* del árbol, mostradas abajo a la derecha.

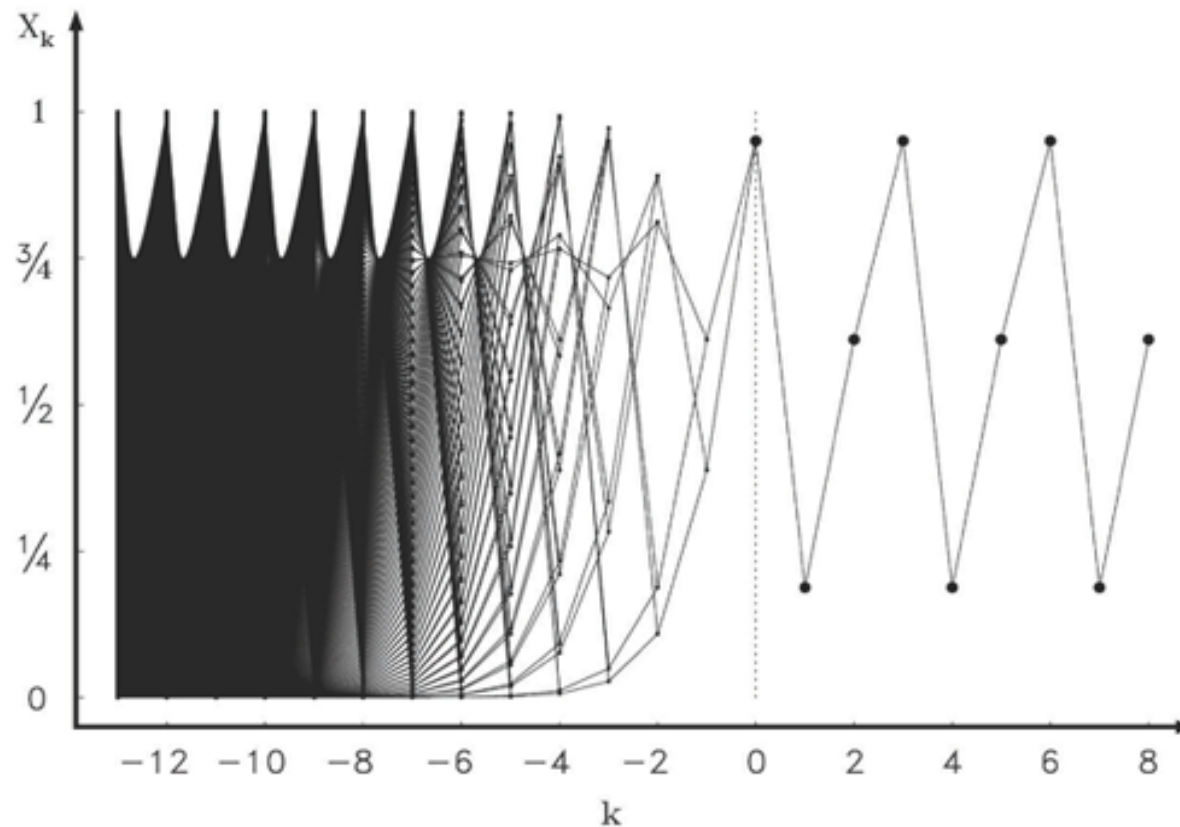


- Por ejemplo, $X_\infty = 0$, el cual se repite para siempre una vez se halla, no puede estar en el conjunto atrayente extraño y tampoco las extensiones mostradas de todos los puntos periódicos, pues ellos también se repiten por definición.

- Excluidas del *conjunto atrayente* están también las *pre-imágenes del cero*, i.e., aquellos valores que terminan en *el origen* y que se hallan mirando hacia atrás en la parábola. Por ejemplo, $X_0 = 1$ no está pues $X_1 = 0$, tampoco $X_0 = 1/2$ pues $X_1 = 1$ y $X_2 = 0$, y tampoco los dos valores que terminan en $1/2$, y los asociados con éstos, siguiendo un árbol:

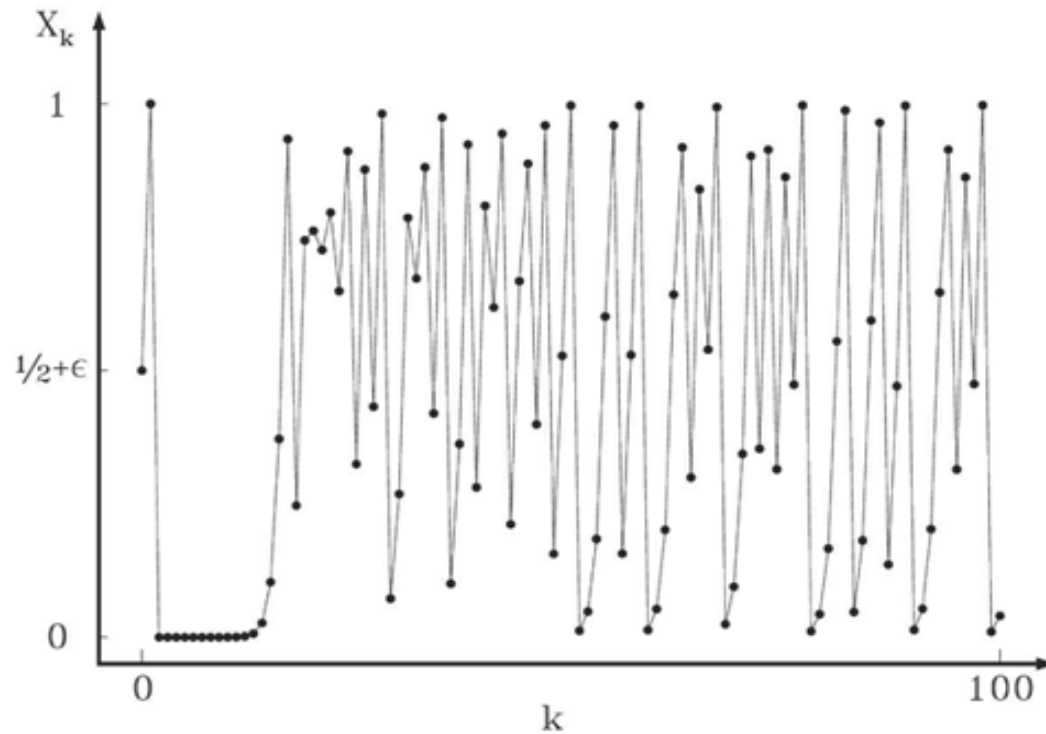


- No están incluidas las pre-imágenes asociadas con la rama principal, $X_0 = 3/4$, y tampoco aquellas relacionadas con **todas** las ramas periódicas que terminan *oscilando para siempre*, como el árbol binario mostrado abajo y asociado con un estado de período 3:



- Note cómo el pasado luce *“idéntico”* pocas generaciones antes del conjunto atrayente y cómo valores iniciales muy cercanos dan lugar a órbitas que terminan en *destinos* diferentes.

- Si se excluyen todos estos valores (árboles) relacionados con oscilaciones (para todo período) del intervalo $[0, 1]$, finalmente se visualiza al *conjunto atrayente extraño*. Dicho conjunto es un *polvo incontable y denso* que se encuentra por todas partes en $[0, 1]$. (!)
- Las órbitas caóticas vagan para siempre y siempre se pierden el *punto medio*. También están sujetas a *sensitividad a las condiciones iniciales*, pues un error pequeño crece:



- Podemos hacer una pausa para preguntarnos qué pueden significar estas ideas y símbolos.
- Como los conceptos universales de la teoría del caos nos recuerdan aquellos de la turbulencia, creo que podemos emplearlos para ilustrar, un poco más, nuestras opciones.
- Podemos notar que al seleccionar el “calor” con el que vivimos, podemos escoger el *orden* o el *desorden*, lo *simple* o lo *complejo*, la *serenidad* y la *paz* o la *turbulencia* y el *caos*.
- Como la naturaleza imperdonable de las **no linealidades** se posa furtivamente mientras nos subimos al árbol, el diagrama de *Feigenbaum* (**la higuera en Alemán**) nos recuerda que también podemos escoger entre *disminuir* o *aumentar* y entre *atenuar* ($\alpha \leq 1$) o *ampliar* ($\alpha > 1$) la respuesta a los problemas que nos aquejan.
- Estas observaciones nos señalan a la **raíz** del árbol, y a su relacionado **Origen**, como nuestro mejor destino, esto es, a la *voluntad de Dios debajo de $X = Y$* en vez de *nuestra manera* cruzando el umbral “justo”, y a una condición de *abandono*, **el cero**, y *obediencia* en vez de nuestro *egoísmo* y *rebelión*.
- Podemos recibir la *bendición* asociada con nuestra buena escogencia, una que nos regala un *hogar en el cielo*, o podemos terminar recibiendo una *maldición* certera que nos envía a un caminar doloroso, *vagando* en el polvo y siempre agobiados en el calor del *infierno*.

- Para concluir, estas son algunas de las opciones que esta lección nos recuerda:

<i>Orden</i>	<i>Desorden</i>
<i>Simple</i>	<i>Complejo</i>
<i>Serenidad</i>	<i>Turbulencia</i>
<i>Paz</i>	<i>Caos</i>
<i>Disminuir</i>	<i>Aumentar</i>
<i>La voluntad de Dios</i>	<i>Nuestra manera</i>
<i>Debajo de $X = Y$</i>	<i>Encima de $X = Y$</i>
<i>Abandono</i>	<i>Egoísmo</i>
<i>Obediencia</i>	<i>Rebeldía</i>
<i>Fruto</i>	<i>Maldición</i>
<i>En casa</i>	<i>Vagando</i>
<i>Cielo</i>	<i>Infierno</i>

- La siguiente poesía-canción resume esta lección y sirve de puente a la siguiente.

EN MEDIO DEL CAOS

En la ciencia moderna
hay un árbol católico,
con raíz sempiterna
y un follaje caótico. (2)

Este icono describe
la demencia del meollo,
y poderoso define
la salida del embrollo. (2)

Oye amigo comprende
fiel aviso de la higuera:
si te crees muy valiente
vas a llorar tu ceguera. (2)

Oye bien santo consejo
el prepararse es prudente: (2)
es vital andar despierto
para burlar a la muerte. (2)

Y entiende que...

En medio del caos
hay una salida
que lleva a la vida.

En medio del caos
se halla una guarida
que sana la herida.

En lo alto de la higuera
hay un caminito
que va al infinito.

En lo alto de la higuera
se halla un puntito
que lo une todito.

En medio del caos
hay una rayuela
que brinca sin pena.

En medio del caos
se halla el Omega
que nutre y libera.

En lo alto de la higuera
hay un pozo fino
que riega el destino.

En lo alto de la higuera
se halla el fiel trino
que da lo divino.

En medio del caos,
búscalos y verás,
en medio del caos,
un amigo de verdad,
en medio del caos,

una puerta abierta,
en medio del caos,
 que lleva a la esencia,
en medio del caos,
 con todo equilibrio,
en medio del caos,
 se evita el peligro,
en medio del caos,
 caminando recto,
en medio del caos,
 se halla lo cierto.

En lo alto de la higuera,
 ve que no invento,
en lo alto de la higuera,
 un oasis muy bello,
en lo alto de la higuera,
 hay un trigo bueno,
en lo alto de la higuera,
 rodeado de maleza,
en lo alto de la higuera,
 hay un ojo de aguja,
en lo alto de la higuera,
 que pasas y cura,
en lo alto de la higuera,
 te humillas, sonrías,
en lo alto de la higuera,
 y llegas al origen.

En medio del caos,
 con la santa gloria,
en lo alto de la higuera,

hallas la victoria,
en medio del caos,
 escrito en tu pecho,
en lo alto de la higuera,
 encuentras el Reino,
en medio del caos,
 rodeado de la muerte,
en lo alto de la higuera,
 descubres tu suerte,
en medio del caos,
 con el alma clara,
en lo alto de la higuera,
 no te pasa nada.

En medio del caos,
en lo alto de la higuera. (4)

*Ve que no miento:
 no lo dudes...*



Referencias:

1. H. Bai-Lin (Ed.), *Chaos*, World Scientific, Singapore, 1984.
2. M. J. Feigenbaum, “Quantitative universality for a class of nonlinear transformations,” *J. Stat. Phy.* 19(1):25, 1978.
3. J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*, Penguin Books, New York, 1987.
4. F. C. Moon, *Chaotic Vibrations*, John Wiley & Sons, New York, 1987.
5. H.-O. Peitgen, H. Jurgens, and D. Saupe, *Chaos and Fractals*, Springer-Verlag, New York, 1992.