

# **LA ELOCUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN**

Carlos E. Puente

Department of Land, Air and Water Resources

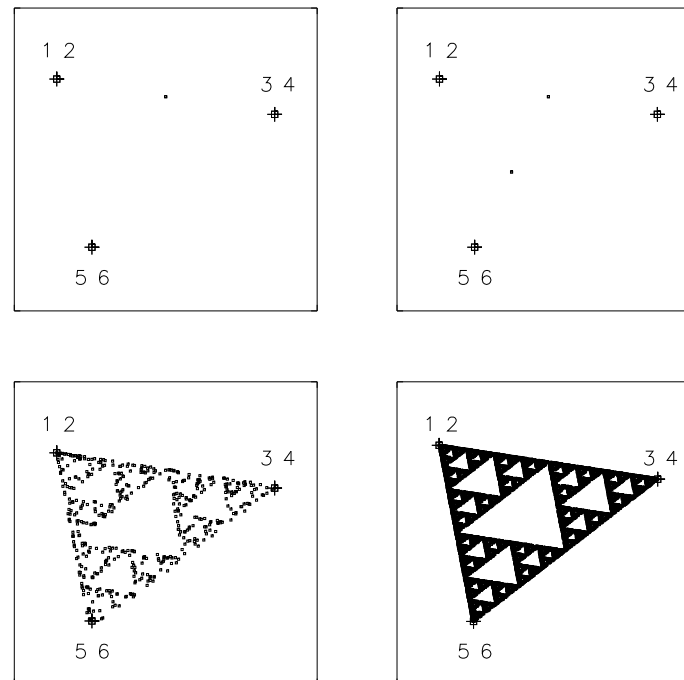
University of California, Davis

<http://puente.lawr.ucdavis.edu>

## Resumen

- *Repasa la construcción del triángulo de Sierpinski iterando reglas sencillas.*
- *Introduce otras reglas lineales que generan “alambres” con formas de montañas y nubes.*
- *Muestra “sombras” de alambres que son un modelo Platónico de la complejidad natural.*
- *Explica cómo los casos que llenan el plano siempre dan lugar a campanas de Gauss.*
- *Generaliza las ideas a más dimensiones incluyendo campanas bivariadas en el límite.*
- *Exhibe caleidoscopios exóticos de patrones que descomponen las campanas circulares.*
- *Muestra cristales de hielo y rosetas bioquímicas como tesoros dentro de la campana.*
- *Argumenta que la libertad mansa, en la “plenitud del amor”, es nuestra mejor opción.*

- Esta es una lección muy especial para mí, pues los resultados aquí expuestos resumen mi trabajo en Davis, tal y como se ha adelantado con la asistencia generosa de mis colaboradores.
- Recuerde el *triángulo de Sierpinski*, encontrado *iterando* tres reglas sencillas que se “*mueven al medio*” de un vértice, guiadas *aleatoriamente* por los lanzamientos de un dado:



- Michael Barnsley mostró en 1988 que al reemplazar dichas reglas, por otras que también se mueven *hacia adentro*, se generan otros *conjuntos atrayentes* interesantes.

- Considere dos reglas **lineales**, “*afines*”, definidas en el plano:

$$w_1(x, y) = (x/2, x + d_1 \cdot y)$$

$$w_2(x, y) = (x/2 + 1/2, 1 - x + d_2 \cdot y)$$

con *escalamientos verticales*  $d_1$  y  $d_2$  teniendo magnitudes menores que 1 y para  $x \in [0, 1]$ .

- Las componentes  $x$  sólo dependen de  $x$  y las componentes  $y$  dependen de  $x$  y de  $y$ .
- En  $x$ ,  $w_1$  opera a la *izquierda* de  $1/2$  y  $w_2$  lo hace a la *derecha* de  $1/2$ .
- El **conjunto atrayente** generado por dichas reglas se puede vislumbrar como sigue.
- Primero que todo, el conjunto incluye los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ , pues  $w_1$  y  $w_2$  dejan tales puntos “*fijos*”, esto es,  $w_1(0, 0) = (0, 0)$  y  $w_2(1, 0) = (1, 0)$ .
- Como  $w_1(1, 0) = (1/2, 1)$  y  $w_2(0, 0) = (1/2, 1)$ , el conjunto también incluye el punto  $(1/2, 1)$ .
- El resto del conjunto atrayente “brota” de las imágenes de  $(1/2, 1)$  mediante las dos reglas:

$$w_1(1/2, 1) = (1/4, 1/2 + d_1), \quad w_2(1/2, 1) = (3/4, 1/2 + d_2)$$

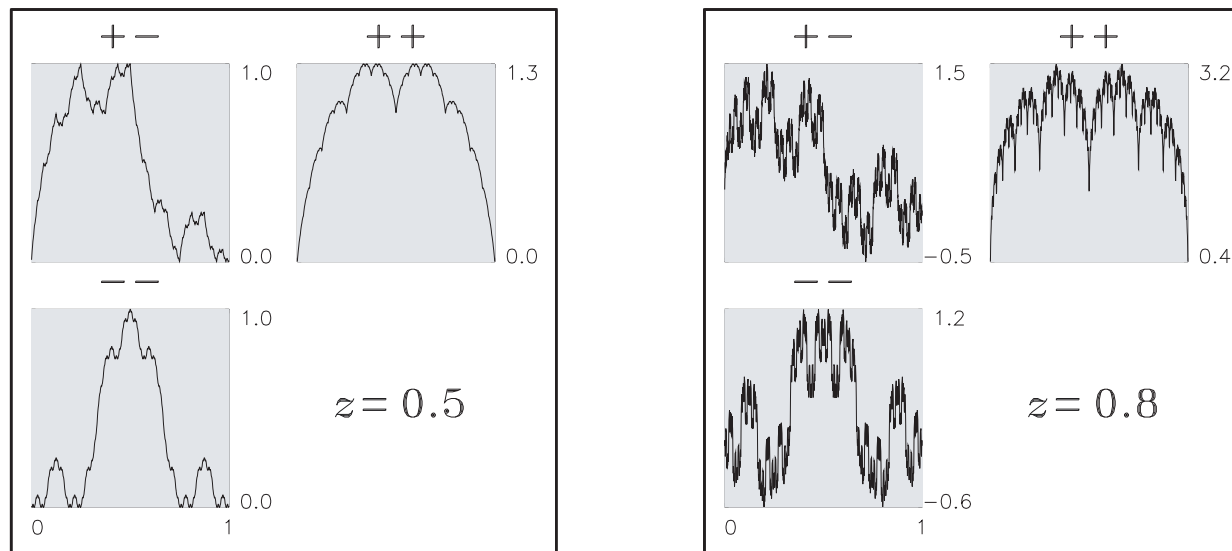
las cuales producen nuevos puntos **intermedios**, como en un *árbol infinito binario*, e.g.,

$$w_1(1/4, 1/2 + d_1) = (1/8, 1/4 + d_1 \cdot (1/2 + d_1)), \quad w_1(3/4, 1/2 + d_2) = (3/8, 3/4 + d_1 \cdot (1/2 + d_2))$$

y así mismo para  $w_2$ , y ad infinitum.

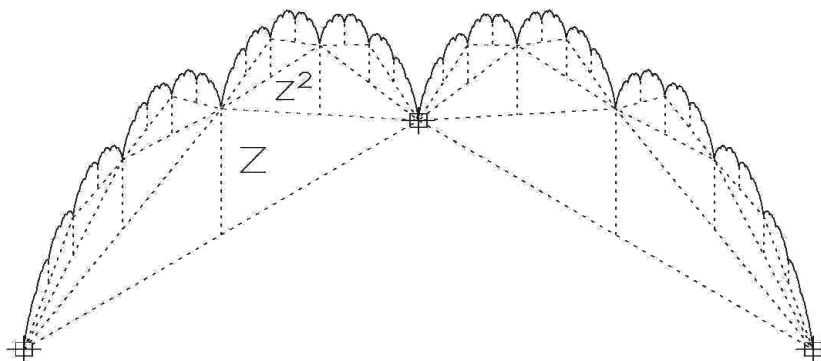


- Al jugar el *juego del caos* con estas reglas sencillas, esto es, iterándolas mediante sucesivos lanzamientos aleatorios de una moneda, resulta una familia de “**alambres**” continuos que *interpolan* los tres puntos antes mencionados  $\{(0, 0), (1/2, 1), (1, 0)\}$ . (!)
- Sus gráficas para  $z = |d_1| = |d_2|$  y para todas las combinaciones de signos pertinentes son:



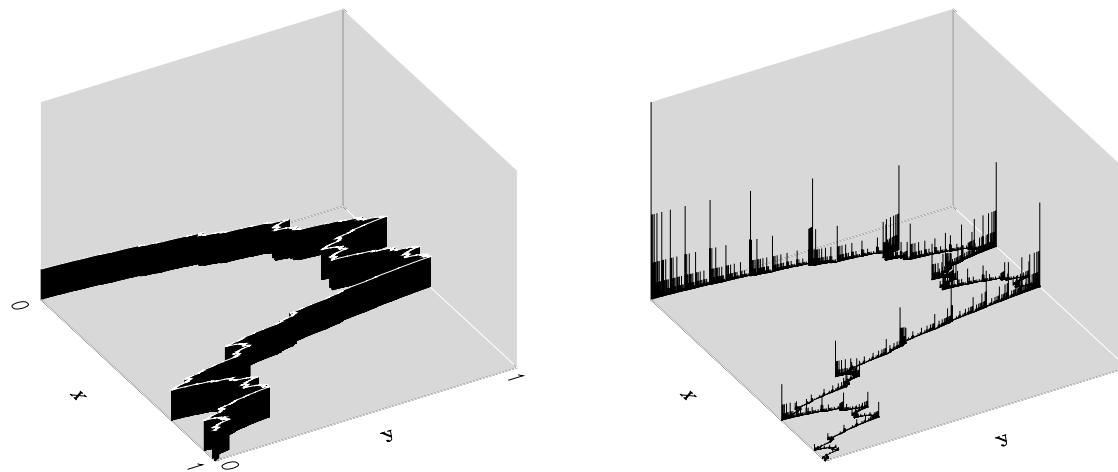
- Claramente, los alambres en la izquierda requieren de menos tinta que aquellos a la derecha.
- Mientras que los conjuntos a la izquierda son *finitos* en longitud y no son fractales, i.e.,  $D = 1$ , aquellos a la derecha son *fractales* con longitud *infinita* y  $D = 1 + \ln(2 \cdot z) / \ln(2) \approx 1.68$ .
- Cuando  $z$  tiende a 1,  $D$  tiende a 2, y los alambres “*siguen creciendo*” hasta **llenar** el plano.

- Los alambres se pueden describir geoméricamente como la *curva de Koch*:
- A partir de las reglas, el caso ++, que resulta en el perfil de una “nube”, es como sigue:



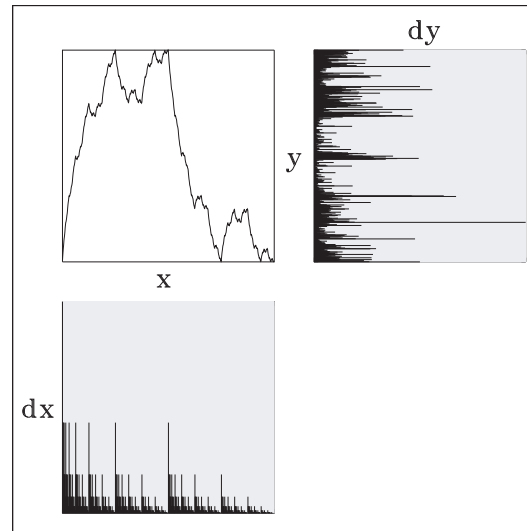
- Una los tres puntos iniciales de izquierda a derecha.
- Halle dos puntos yendo hacia **arriba**  $z$  desde el medio:  $1/2 + d_1$  y  $1/2 + d_2$  como antes.
- Una de izquierda a derecha para hallar cuatro puntos intermedios hacia **arriba**  $z^2$ , y así sucesivamente, en potencias de  $z$ . (!)
- Para los casos +- y --, que dan perfiles de “montañas”, existen construcciones similares:
  - La combinación +- viaja hacia **arriba** y hacia **abajo** en la primera generación, y luego sigue secuencias arriba y abajo en cada paso. El caso -- halla todos sus puntos de una forma alternada: los dos primeros **abajo**, los cuatro siguientes **arriba**, etc.

- El juego del caos “pinta” los alambres *punto a punto*, y ellos aparecen independientemente del tipo de “*moneda*”, en virtud a un teorema comprobado por John Elton en 1987.
- Sin embargo, y como se ilustra abajo para el caso  $+-$  y  $z = 1/2$ , el uso de monedas **justas** o **sesgadas** resulta en *texturas* distintas definidas sobre el alambre:



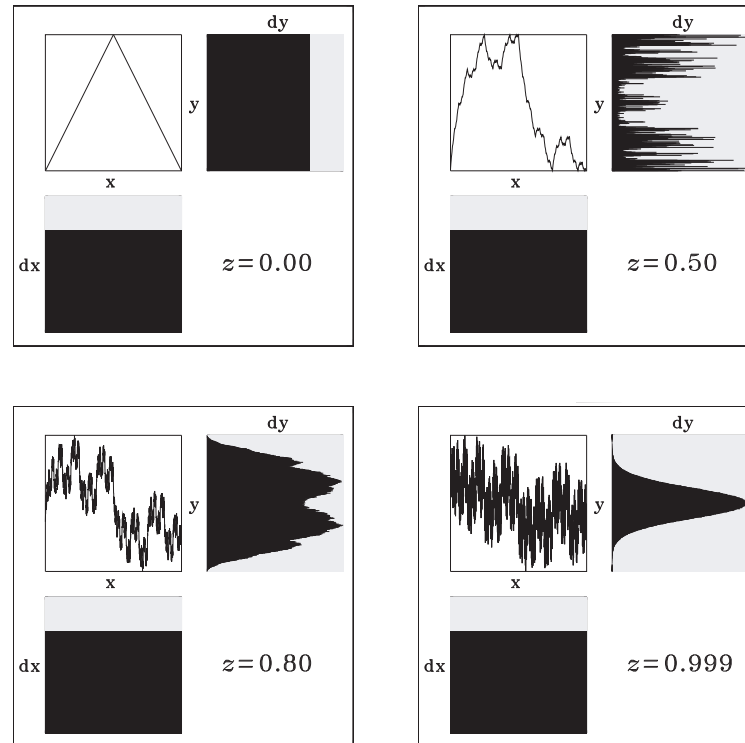
- Cuando la moneda es *justa*, el conjunto atrayente se llena *uniformemente*.
- Esto sucede pues las reglas  $w_1$  y  $w_2$  operan a la *izquierda* y a la *derecha* y rompen el dominio del alambre precisamente por la mitad. (!)
- Cuando la moneda contiene un *sesgo* “70-30” relativo a  $w_1$  y  $w_2$ , las iteraciones generan una textura *multi-fractal* sobre el alambre. (!)

- Como desde  $x$  se obtiene el mismo objeto *espinoso* de la **turbulencia** dado por una *cascada multiplicativa*, digamos  $dx$ , un buen día se me ocurrió el estudiar las “*sombras*” producidas por la textura, cuando ellas son vistas desde el eje  $y$ , digamos  $dy$ .



- Como el alambre es una *función* de  $x$  a  $y$ , también se me ocurrió que la idea podía ser útil para describir fenómenos hidrológicos, pues dichos procesos se pueden entender como “*transformaciones de turbulencia*”.
- La idea resulta proveer un “*modelo Platónico de la complejidad natural*”. Platónico por la famosa alegoría del cavernícola y también por el “romanticismo” de sugerir un modelo alternativo a la noción bien establecida del *azar*. (!)

- Se halla una gran variedad de patrones interesantes al variar los parámetros del caso.
- Por ejemplo, si  $z$  aumenta, se obtiene la siguiente secuencia a partir de una moneda *justa*:



- De un  $dx$  *uniforme* se hallan “*proyecciones*”  $dy$  que cuentan los *cruces* de los alambres.
- Cuando  $z$  tiende a 1, el alambre llena el plano y se obtiene la **campana** como “sombra”, esto es, la famosa distribución *Gaussiana* o *normal*, así nombrada desde que Karl Friedrich Gauss la usara inicialmente para estudiar datos astronómicos en 1809. (!)

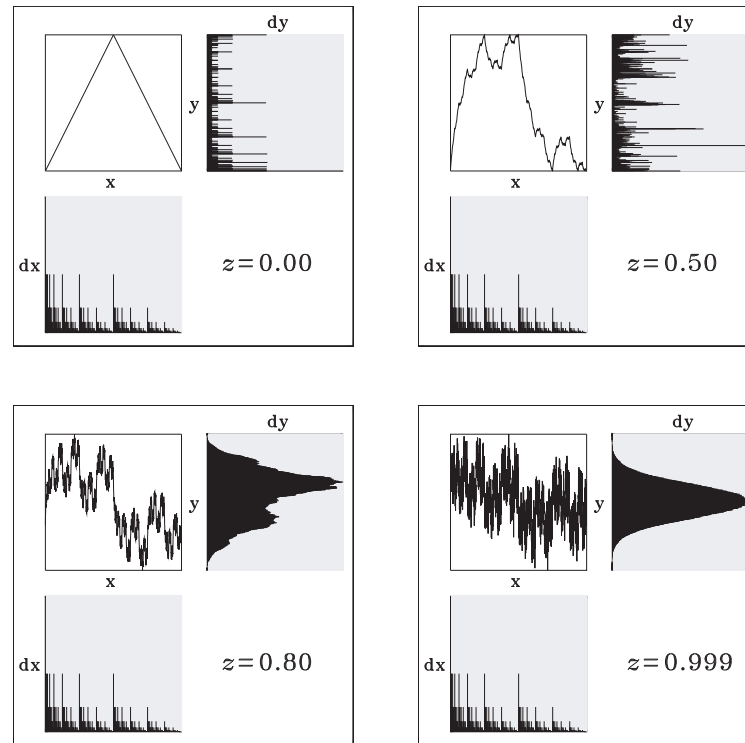
- La **campana** con *media*  $\mu$  y *varianza*  $\sigma^2$  está dada por la fórmula familiar:

$$dy(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2}$$

que contiene los tres números irracionales célebres  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  y  $e$ .

- Su relevancia proviene de su presencia ubicua en ciencia (e.g., *dinámica de difusión* y *conducción del calor*) y de su relación con el místico *teorema del límite central*, que afirma que la suma de eventos “aleatorios” *independientes* resulta en *campanas*.
- Como la suma de eventos independientes *uniformemente distribuidos* da una *distribución normal*, el hecho que la campana se halle como sombra de un alambre que llena el espacio parece ser una simple consecuencia de un teorema de límite central.
- Sin embargo, y como se apreciará más adelante, la **construcción geométrica** ciertamente es *novedosa* y no parece estar implicada por teoremas existentes.
- Una prueba de este resultado sorprendente fue publicada en 1996 bajo el título “The Gaussian distribution revisited”, y ella consiste en mostrar *por inducción*, y mediante expresiones analíticas bastante largas, que los momentos de  $dy$  en efecto convergen a los momentos de la distribución Gaussiana cuando  $z$  tiende a 1. (!)

- La siguiente secuencia se halla usando una moneda *segada* 70-30:

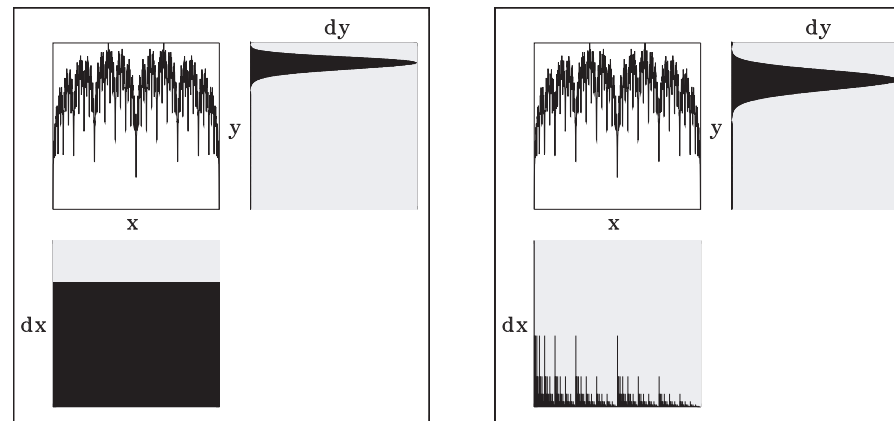


- $dy$  es la “*distribución derivada*” de  $dx$  mediante la *transformación* del alambre, y dicha sombra se halla, para un valor de  $y$ , sumando las “masas” correspondientes en  $dx$ .
- En la medida en que los alambres “crecen”, ellos filtran más las púas de la “iluminación”.
- En el límite, el **mismo alambre** de antes, da una *campana*, y ella ocurre independientemente de la *entrada multi-fractal*, esto es, para *cualquier* valor del sesgo  $p \neq 0.7$ . (!)

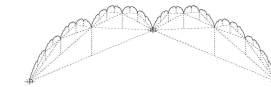
- El resultado resulta ser aún más fuerte, pues se puede emplear como  $dx$  cualquier textura con una *distribución acumulada continua* sobre el dominio  $[0, 1]$ , y ella también da lugar a otra campana, una cuya *media* y *varianza* dependen de tal  $dx$ . (!)
- Esto incluye, además de las **densidades suaves** sobre  $[0, 1]$ , todas las *texturas espinosas* definidas sobre *polvos incontables* y que dan lugar a **escaleras del diablo**. (!)
- Estos últimos resultados son inesperados, pues contrario a lo que sucede con las densidades, el sumar eventos independientes con distribuciones *multi-fractales* resulta en otros *multi-fractales*, i.e., dichas texturas no pertenecen al “*dominio de atracción a la normalidad*”, pues las *espinas* y el *polvo* no están cubiertos por el *teorema del límite central*.
- El alambre límite es ciertamente muy especial, pues **sólo** él provee, en su inherente y máxima infinitud, una *transformación universal* del “**desorden**” a la “**armonía**” y un *puente* inesperado entre la **turbulencia** y la **difusión**. (!)
- Los únicos casos excluidos de la normalidad son las texturas **discretas** definidas sobre puntos *finitos* o *contables*, pues ellos no se puede amalgamar en una campana sobre el continuo.
- Como todo esto sucede en el caso  $+-$ , es natural preguntarse si también se hallan campanas para las otras combinaciones de signos.



- El *alambre montañoso* del caso -- resulta dar no *una* sino *dos* campanas. Esto sucede pues las **bajadas** y **subidas** se sincronizan en el límite resultando en dos medias. (!)
- El alambre en forma de *nube* y correspondiente al caso ++ es muy especial. Cuando  $d_1$  y  $d_2$  tienden a **uno**, se halla, *universalmente*, una campana **concentrada** en el *infinito*: (!)



- Como lo sugieren las gráficas arriba para  $z = 0.99$ , la media y la varianza tienden ambas a infinito, pero lo hacen en tal forma que  $\sigma/\mu \rightarrow 0$ . Esto significa, al final, que “*toda la masa relevante*”, con probabilidad uno, es *alzada al infinito* de una manera que anula toda la *entropía* presente en cualquier entrada *no-discreta*  $dx$ . (!)



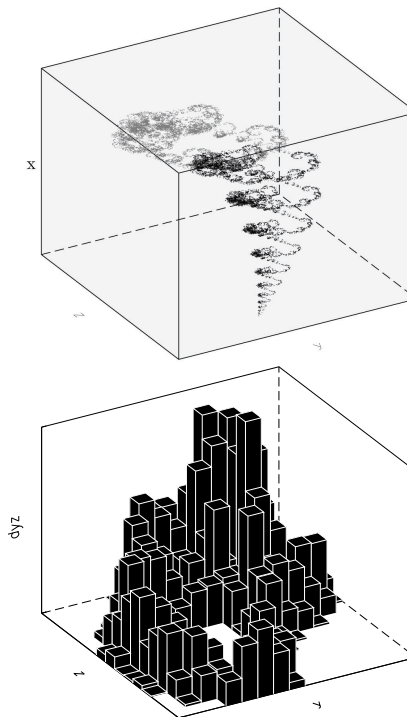
- De una manera mística, esta **transformación poderosa**, como “*alas de ángeles*”, lo lleva todo a las “*nubes*”, y esto ocurre de acuerdo a la melódica campana. (!)

- Las ideas se pueden extender a *más dimensiones* agregando más *coordenadas* y *parámetros*:

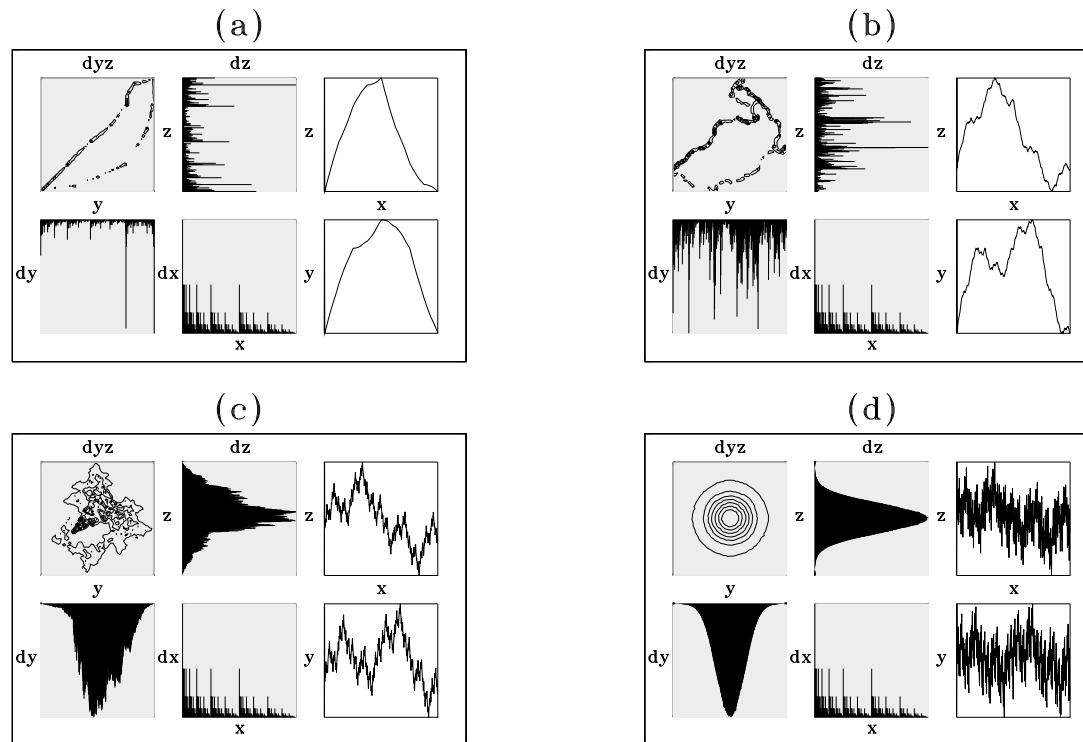
$$w_1(x, y, z) = (x/2, Hx + d_1y + h_1z, x + l_1y + m_1z)$$

$$w_2(x, y, z) = (x/2 + 1/2, -Hx + d_2y + h_2z + H, -x + l_2y + m_2z + 1)$$

- Dichas reglas producen *alambres "fractales"* en tres dimensiones, de  $x$  al plano  $y - z$ , que interpolan  $\{(0, 0, 0), (1/2, H, 1), (1, 0, 0)\}$  y tienen *dimensiones* entre **uno** y **tres**.
- Con dichos nuevos alambres se pueden obtener proyecciones sobre el plano  $y - z$ , para generalizar las *nociones Platónicas* acerca de la *complejidad natural*:



- Los *alambres límite* dan **campanas**, ahora bivariadas,  $dyz$ , y ellas aparecen a partir de cualquier *multi-fractal*  $dx$ , ( $d_1 = d_2 = m_1 = m_2 = 0$ ,  $h_1 = -h_2 = l_1 = l_2 = z$ ,  $H = 1$ ):

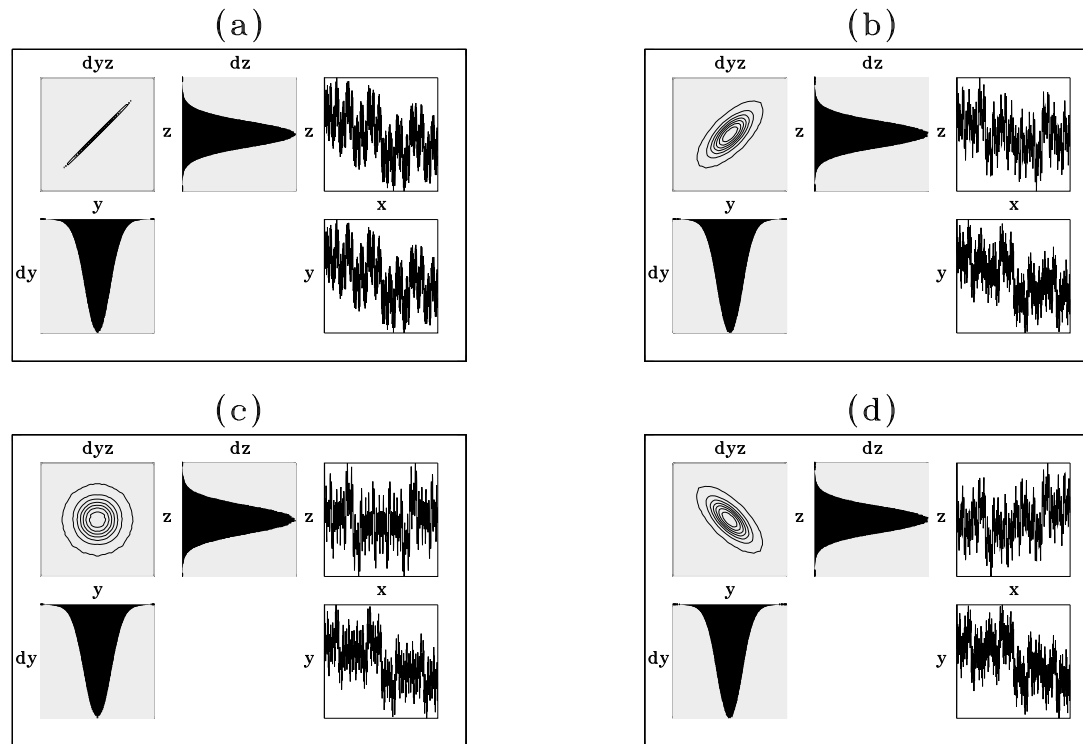


– (a)  $z = 0.25$ , (b)  $z = 0.5$ , (c)  $z = 0.75$ , (d)  $z = 0.999$ .

- Es conveniente usar “*coordenadas polares*” para definir *escalamientos* y *rotaciones*:

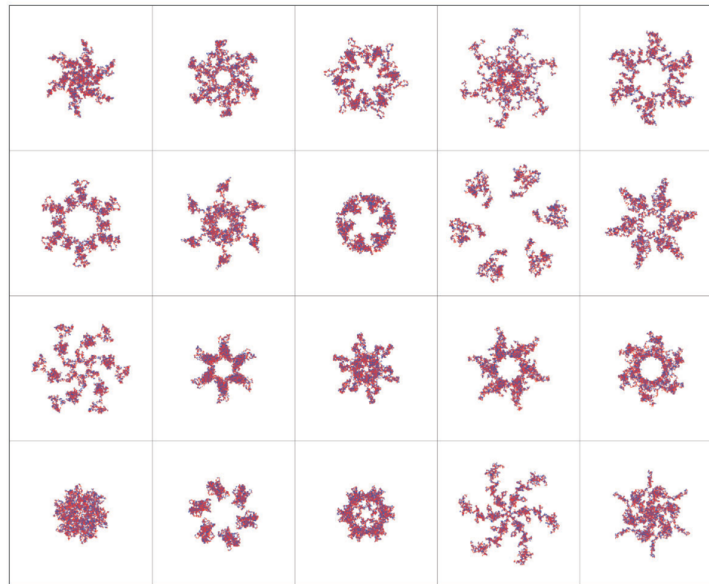
$$\begin{pmatrix} d_i & h_i \\ l_i & m_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i^{(1)} \cdot \cos \theta_i^{(1)} & -r_i^{(2)} \cdot \sin \theta_i^{(2)} \\ r_i^{(1)} \cdot \sin \theta_i^{(1)} & r_i^{(2)} \cdot \cos \theta_i^{(2)} \end{pmatrix}, i = 1, 2.$$

- Se halla una **campana** cuando la magnitud de todos los *escalamientos*  $|r_i^{(j)}|$  tiende a 1 y cuando las *rotaciones* de cada regla se sincronizan tal que  $\theta_i^{(1)} = \theta_i^{(2)} + k_i\pi$ , para  $k_i$  entero.
- Se pueden encontrar campanas elípticas con *correlaciones* arbitrarias a partir de una textura *uniforme* (para  $r_1^{(1)} = -r_1^{(2)} = -r_2^{(1)} = r_2^{(2)} = 0.999$ ,  $\theta_1^{(1)} = \theta_1^{(2)} = \theta_2^{(1)} = \theta_2^{(2)} = \pi/2$ ): (!)



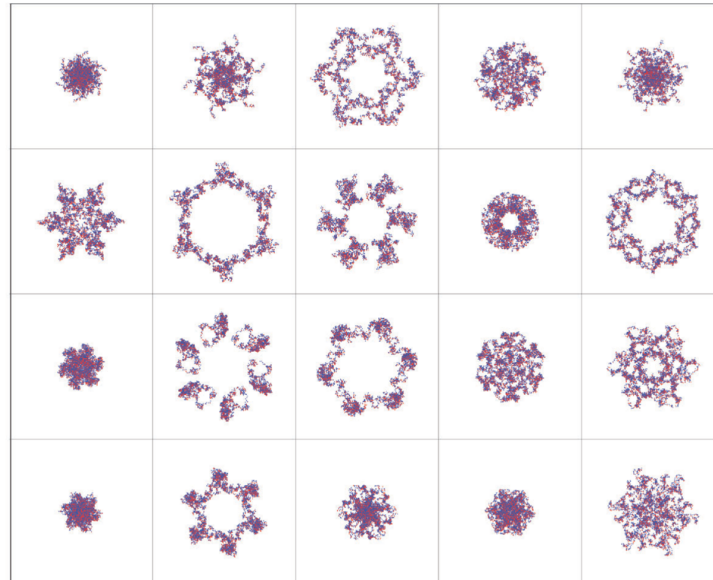
- (a)  $H = 1$ , (b)  $H = 0.41$ , (c)  $H = 0$ , (d)  $H = -0.41$ , con *coeficientes de correlación*,  $\rho$ , de, en orden, 1, 0.7, 0, y -0.7.

- Como los diagramas previos resumen lo encontrado mediante muchas iteraciones, e.g., 15 millones, y como una prueba para dichas campanas ha sido elusiva, en otro buen día se nos ocurrió el estudiar cómo se forman las campanas usando sólo miles de puntos a la vez.
- Si las *rotaciones* están más “*sincronizadas*”, i.e.,  $\theta_1 = \theta_1^{(1)} = \theta_1^{(2)}$ ,  $\theta_2 = \theta_2^{(1)} = \theta_2^{(2)}$  y ambas  $\theta_1$  y  $\theta_2$  dividen  $2\pi$  y son múltiplas de cada una, las *campanas circulares* se descomponen en términos de **caleidoscopios** (para una moneda **justa**, cada 10,000 puntos coloreados *rojo* y *azul*, arriba-abajo e izquierda-derecha,  $H = 1$ ,  $r_1^{(1)} = r_1^{(2)} = r_2^{(1)} = r_2^{(2)} = -0.9999$ ,  $\theta_1 = 2\pi/3$ ,  $\theta_2 = \pi/3$ ): (!)



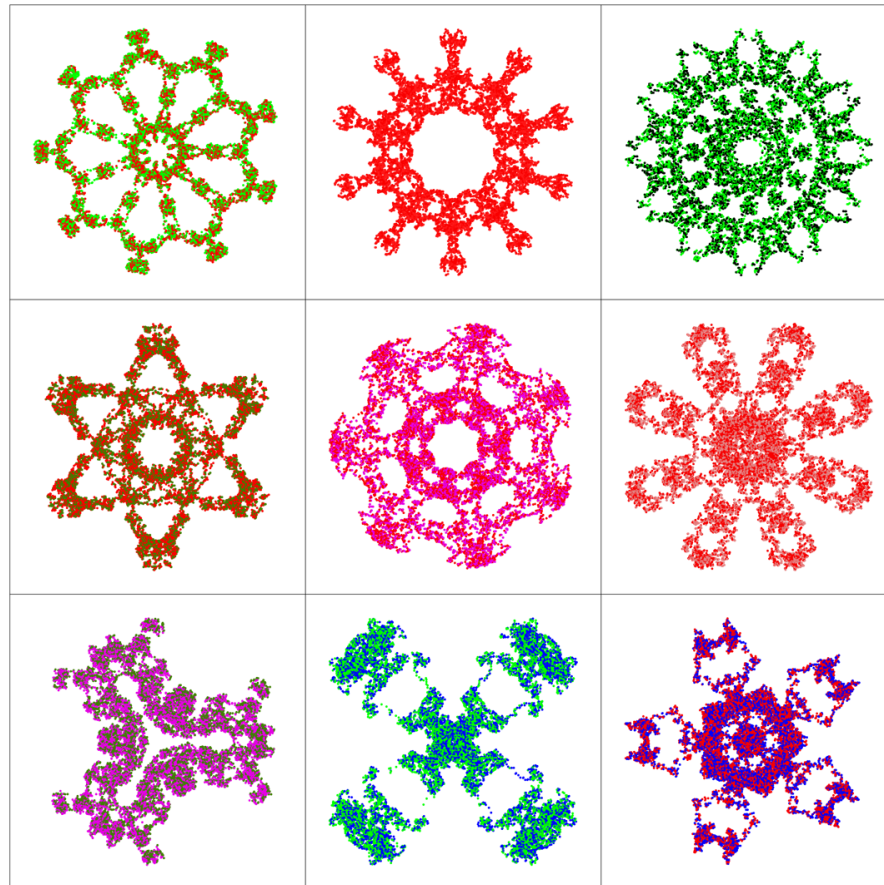
- La campana circular no está compuesta por círculos y discos, sino por bellas *mandalas*. (!)

- El uso de monedas **sesgadas** también resulta en bellos “*tesoros*” simétricos (con los mismos parámetros que el anterior y para una moneda 30-70 que resulta en patrones más azules):

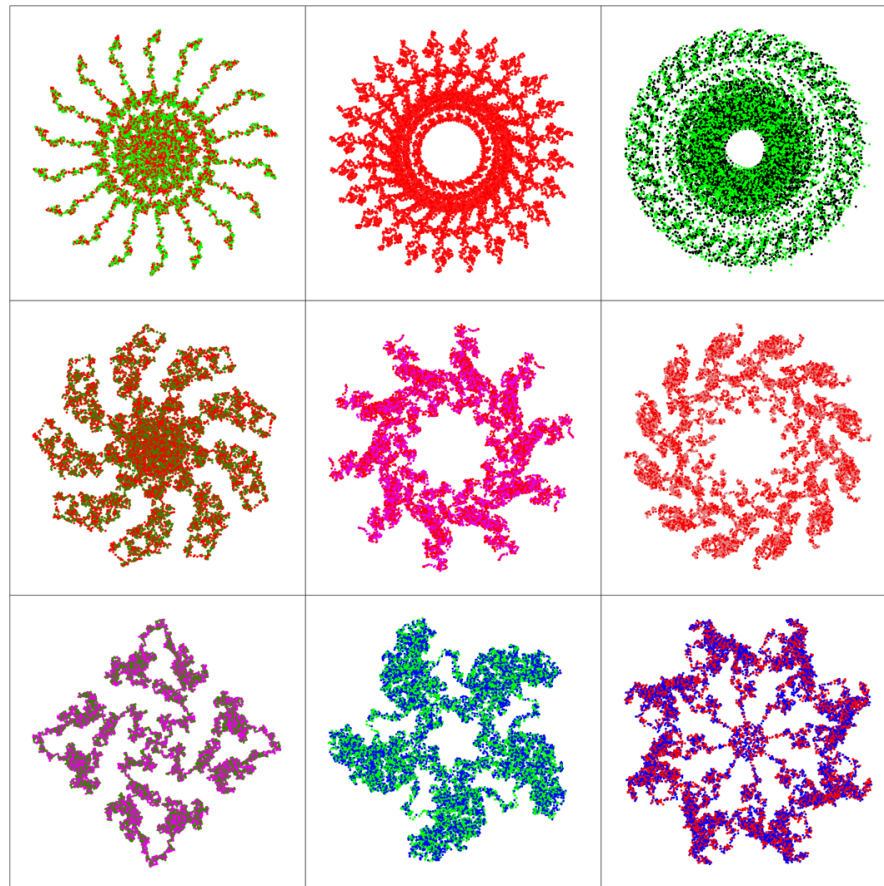


- Manteniendo los escalamientos en “*muchos nieves*” y variando las rotaciones, se encuentran bellos conjuntos que tienen *simetrías* arbitrarias, con cualquier número  $n$  de puntas. (!)
- Las mandalas son **infinitas** y ellas dependen sensiblemente del camino de iteraciones escogido, es decir, de la secuencia precisa obtenida al arrojar “la moneda”.
- La emergencia de muchísimos patrones a partir de un sólo alambre nos recuerda la historia “*El Alef*”, escrita por el célebre filósofo argentino Jorge Luis Borges en 1949. (!)

- Dependiendo de las combinaciones de signos de los *escalamientos*  $r_i^{(j)}$ , los patrones resultantes tienen rasgos *radiales* o *rotacionales*.
- Una muestra de mandalas “*radiales*” (para monedas *justas* y 20,000 puntos, variando las **rotaciones** y  $H = 1, r_1^{(1)} = r_1^{(2)} = r_2^{(1)} = -r_2^{(2)} = 0.99999999$ ) es:

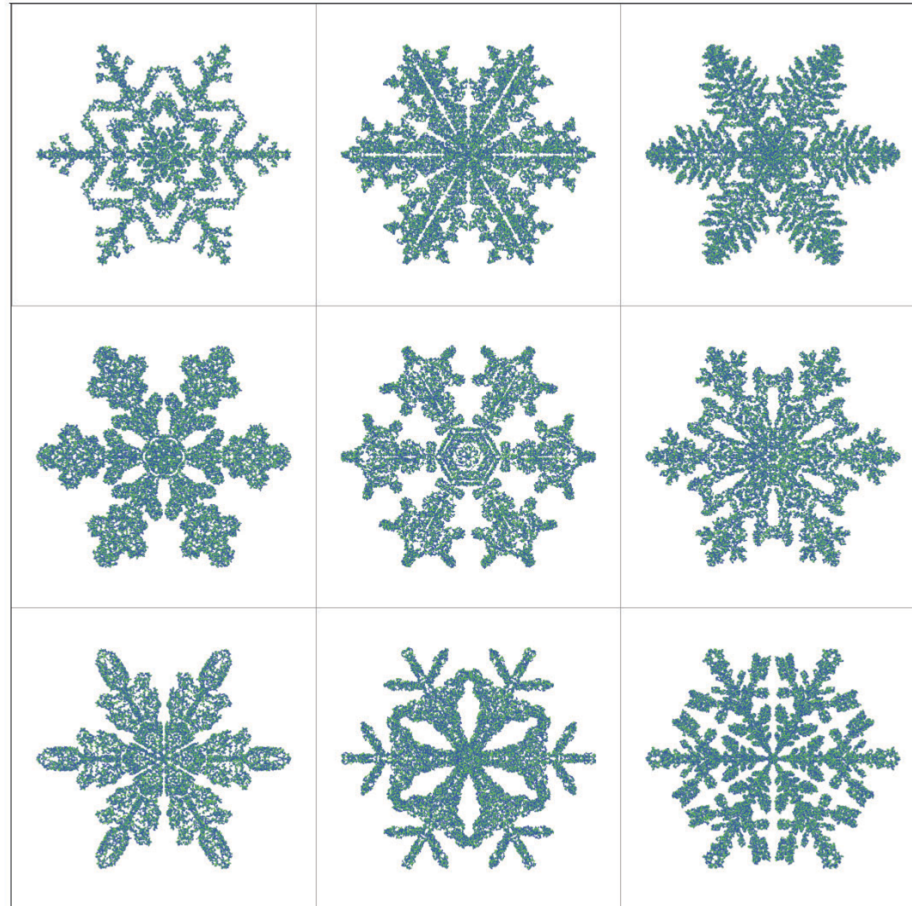


- Los patrones tienen una dinámica exquisita y, si las iteraciones se prolongan, los puntos danzan adentro y afuera para formar, eventualmente, la campana. (!)
- Algunas mandalas “*rotacionales*” (para monedas *justas* y 20,000 puntos, variando las **rotaciones** y  $H = 1, r_1^{(1)} = r_1^{(2)} = r_2^{(1)} = r_2^{(2)} = 0.99999999$ ) son:



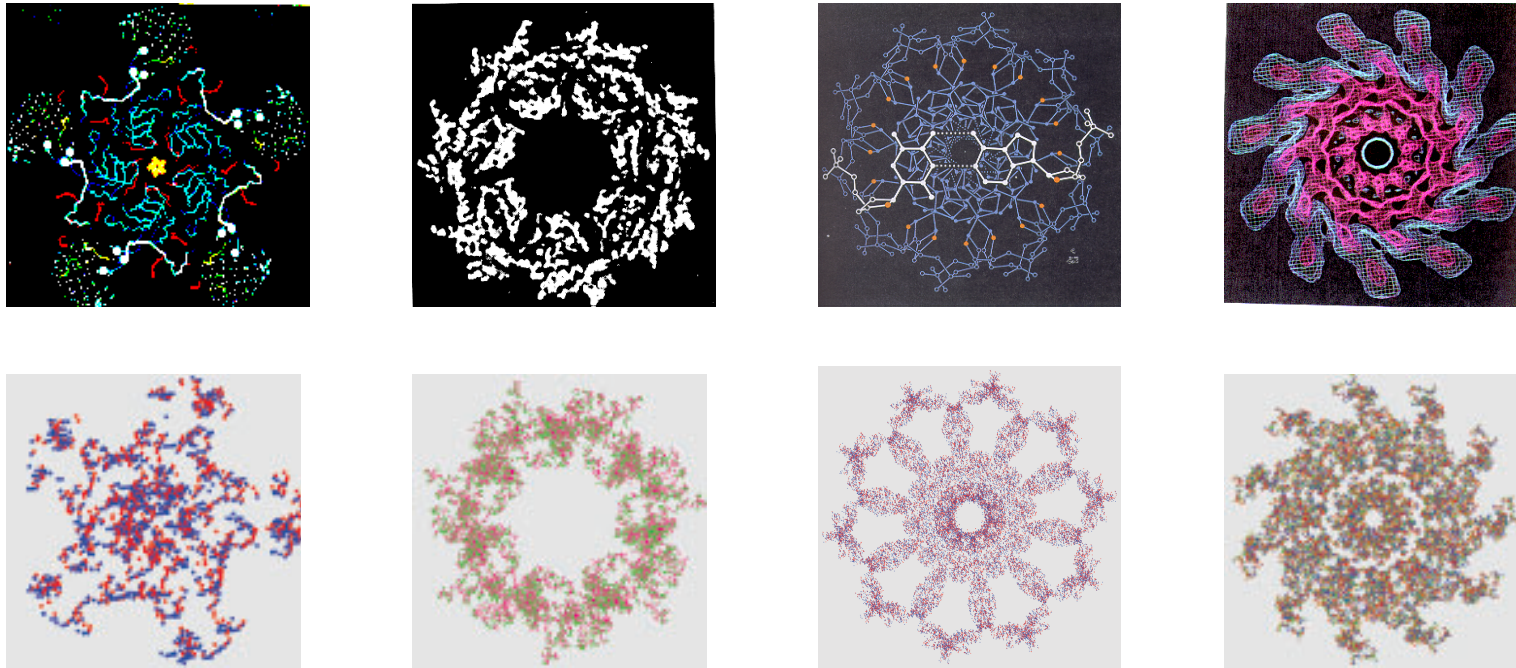


- Algunos patrones dentro de la campana se parecen a conjuntos naturales relevantes.
- Es fácil “*crear*” **cristales de hielo** dentro de la campana (para secuencias especiales de iteraciones, *rotaciones*  $\theta_1$  y  $\theta_2$  fijas en 60 grados, y  $H = 1, -r_1^{(1)} = r_1^{(2)} = r_2^{(1)} = r_2^{(2)} = 0.99999$ ): (!)



– Las plantillas de estos cristales del catálogo de Bentley fueron llenadas pacientemente.

- También hay **rosetas bioquímicas** dentro de la campana. (!)
- Ellas incluyen, de izquierda a derecha, *el virus pie-y-boca*, *la proteína Groel del E. Coli*, *la roseta del B-ADN* y *la bacteria salmonela*, con los patrones “reales” mostrados arriba y los correspondientes a la campana debajo:

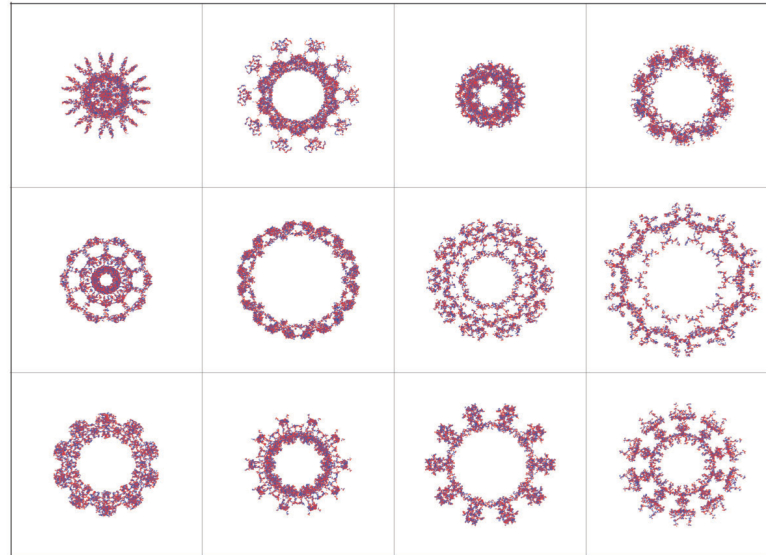


- Aquí sólo el patrón del ADN fue “optimizado”, seleccionando un camino de iteraciones que llena una plantilla de dicha roseta.

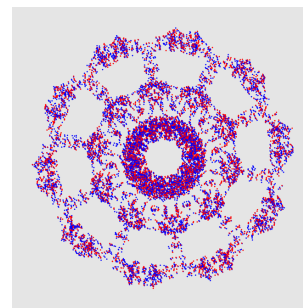
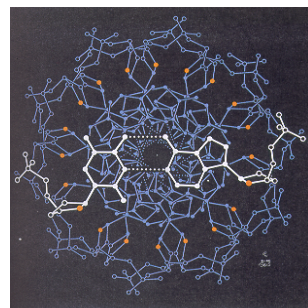
- Como los “**tesoros dentro de la campana**” son **diseños fijos**, dentro de la campana existe un “**orden oculto en el azar**”. (!)
- Estos bellos resultados sugieren un papel *central* para la distribución Gaussiana más allá de la física, de la probabilidad y de la estadística, que también abarca la biología.
- Como siempre existe **belleza en el límite** y los caleidoscopios sólo emergen cuando el alambre *llena el espacio*, los resultados proveen un *paradigma* alternativo para el *origen del orden*, uno que puede llamarse “**orden en la plenitud de la dimensión**”. (!)
- Al adentrarnos en las ideas observamos que el concepto de proyección provee un algoritmo *compacto* y *sencillo* para codificar *información*.
- Esto es así pues un único alambre *infinito*, muestreado mediante diversas secuencias de iteraciones, provee, con certeza, una gran cantidad de patrones interesantes. (!)
- En dicho espíritu y como los tres números  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  y  $e$  se hallan de una forma prominente en la fórmula de la campana, en todavía otro buen día se me ocurrió el estudiar los bellos patrones ocultos dentro de campanas circulares, cuando la expansión binaria de dichos números guía las iteraciones, i.e.,  $\sqrt{2} = 1.0110100 \dots$ ,  $e = 10.101101 \dots$ ,  $\pi = 11.001001 \dots$ .



- Los siguientes patrones se encuentran mediante la expansión binaria de  $\pi$  (para 20,000 puntos, *rotaciones*  $\theta_1 = \theta_2 = 36$  grados, y  $H = 1$ ,  $-r_1^{(1)} = r_1^{(2)} = r_2^{(1)} = r_2^{(2)} = 0.99999999$ ):



- El segundo conjunto provee una aproximación cercana de la roseta del B-ADN: (!)



- Este curioso resultado es sugestivo y “hace sonar algunas campanas”. Pues al menos él sugiere que “quien maneja el destornillador celestial” no es sólo un “*relojero ciego*”. (!)
- Ahora, podemos hacer una pausa para reflexionar sobre el rico simbolismo de esta lección.
- Como antes, pienso que estas ideas son útiles para iluminar nuestras opciones personales.
- Como algunos alambres fractales *transforman* patrones de *desorden* en otros patrones de *desorden*, y otros alambres *especiales* que *llenan el espacio transforman* patrones de *desorden* en patrones de *orden*; creo que las nociones nos ayudan a visualizar nuestras opciones **espirituales** y nos sirven de recordatorio acerca de la posibilidad de nuestra propia **transformación**.
- Como la *campana ++ en el infinito* mantiene “*la flama*” y no contiene entropía alguna, las ideas refuerzan de una manera vívida que es mejor, en la medida de lo posible, el escoger el **conducir** el *gozo de la vida* en vez de *disiparlo* con nuestro *negativismo*. (!)
- Esto es así pues existe una marcada diferencia entre lo *finito* y lo *infinito*, aún para la campana  $+-$ , y porque dicha distinción nos ayuda a apreciar que es mejor el buscar la **plenitud** en la “*mayor dimensión posible*” del **Amor** en vez de continuar viviendo en las inherentes condiciones de *soledad* y *miedo*, las cuales *nunca nos “pueden llenar”*. (!)



- Nosotros podemos escoger el **confiar** e ir hacia adelante diciéndole **sí** a **Dios**, esto es y nuevamente el espiral hacia afuera  $0.999\cdots$  que nos da *unidad*, o podemos *rebelarnos* para intentar vivir “*a nuestra manera*”, esencialmente negando nuestra transformación.
- Esto se traduce en escoger a la **fe** como nuestro lema o el seguir apegados a *dudas* que restringen nuestro crecimiento, pues podemos escoger la *libertad gentil* simbolizada por la siempre graciosa campana o continuar siendo *esclavos* de nuestras “*subidas*” y “*bajadas*”.
- En el espíritu del *teorema del límite central*, podemos abandonarnos a vivir *suave* e *independientemente*, “*cargando nuestra cruz positiva día a día*”, o podemos escoger el vivir en el estado sub-óptimo y muy común caracterizado por nuestras “*espinas*” de *ansiedad*.
- Podemos escoger el exaltar la *belleza exótica* escondida en campanas límite o continuar “admirando” las “*sombras estancadas*”, solamente patrones de desorden, a dimensiones “espirituales” inferiores.
- Al final, y de una forma elocuente, podemos seleccionar nuestro destino aquí en la tierra, podemos escoger entre la *luz* y la *oscuridad* y entre el *cielo* y la *tierra*.
- Empleando nuestro libre albedrío nosotros podemos aceptar el **más**, la realidad del **Amor**,  $I = +\sqrt{+1}$ , o el *menos*, que nos lleva a una trampa *imaginaria*,  $i = \sqrt{-1}$ . (!)

- En conclusión, estas son algunas de las opciones que nos recuerda esta charla:

<i>Conducción</i>	<i>Disipación</i>
<i>Plenitud</i>	<i>Soledad</i>
<i>Confianza</i>	<i>Rebelión</i>
<i>Fe</i>	<i>Dudas</i>
<i>Libertad</i>	<i>Esclavitud</i>
<i>Día a día</i>	<i>Ansiedad</i>
<i>Belleza exótica</i>	<i>Penumbras</i>
<i>Infinito</i>	<i>Finito</i>
<i>Luz</i>	<i>Oscuridad</i>
<i>Cielo</i>	<i>Tierra</i>
<i>+</i>	<i>—</i>
<i>Amor</i>	<i>Egoísmo</i>

- La siguiente poesía resume esta lección.

## LA CAMPANA SILENTE

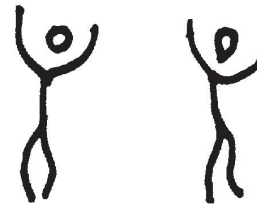
La campana tañe consciente  
irradiando su realidad,  
y sus signos resplandecientes  
bellos realzan la inmensidad.

Sus diseños muestran la vida  
codificada no por azar,  
y su gloria invita arriba  
enarbolando el no dudar.

La campana arde segura  
certificando el poder del más,  
y sus alambres de alas puras  
bien engalanan toda humildad.

Sus rosetas surgen hermosas  
clarificando simple verdad,  
y su calma ya sin espinas  
llena el pecho con caridad.

La campana llama silente,  
incitando a su unidad,  
y sus símbolos transparentes  
prestos anuncian la libertad.





**Referencias:**

1. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
2. J. L. Borges, *The Aleph and Other Stories*, Edited and translated by N. T. di Giovanni, E. P. Dutton & Co., 1970.
3. J. Elton, “An Ergodic Theorem for Iterated Maps,” *Journal of Ergodic Theory and Dynamical Systems* 7: 481, 1987.
4. Plato, *Republic*, translated by R. Waterfield, Oxford University Press, 1993.
5. C. E. Puente, M. M. López, J. E. Pinzón, and J. M. Angulo, “The Gaussian distribution revisited,” *Advances in Applied Probability* 28(2): 500, 1996.
6. C. E. Puente and A. D. Klebanoff, “Gaussians everywhere,” *Fractals* 2(1):65, 1994.
7. C. E. Puente, N. Obregón, O. Robayo, M. G. Puente and D. Simsek, “Projections of fractal functions: a new vision to nature’s complexity,” *Fractals* 7(4):387, 1999.
8. C. E. Puente, “DNA,  $\pi$  and the Bell,” *Complexity* 6(2):16, 2000.
9. C. E. Puente, *Treasures inside the Bell*, World Scientific, 2003.